



BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVENSIS

kat.komp.

594957

Mag. St. Dr.

II



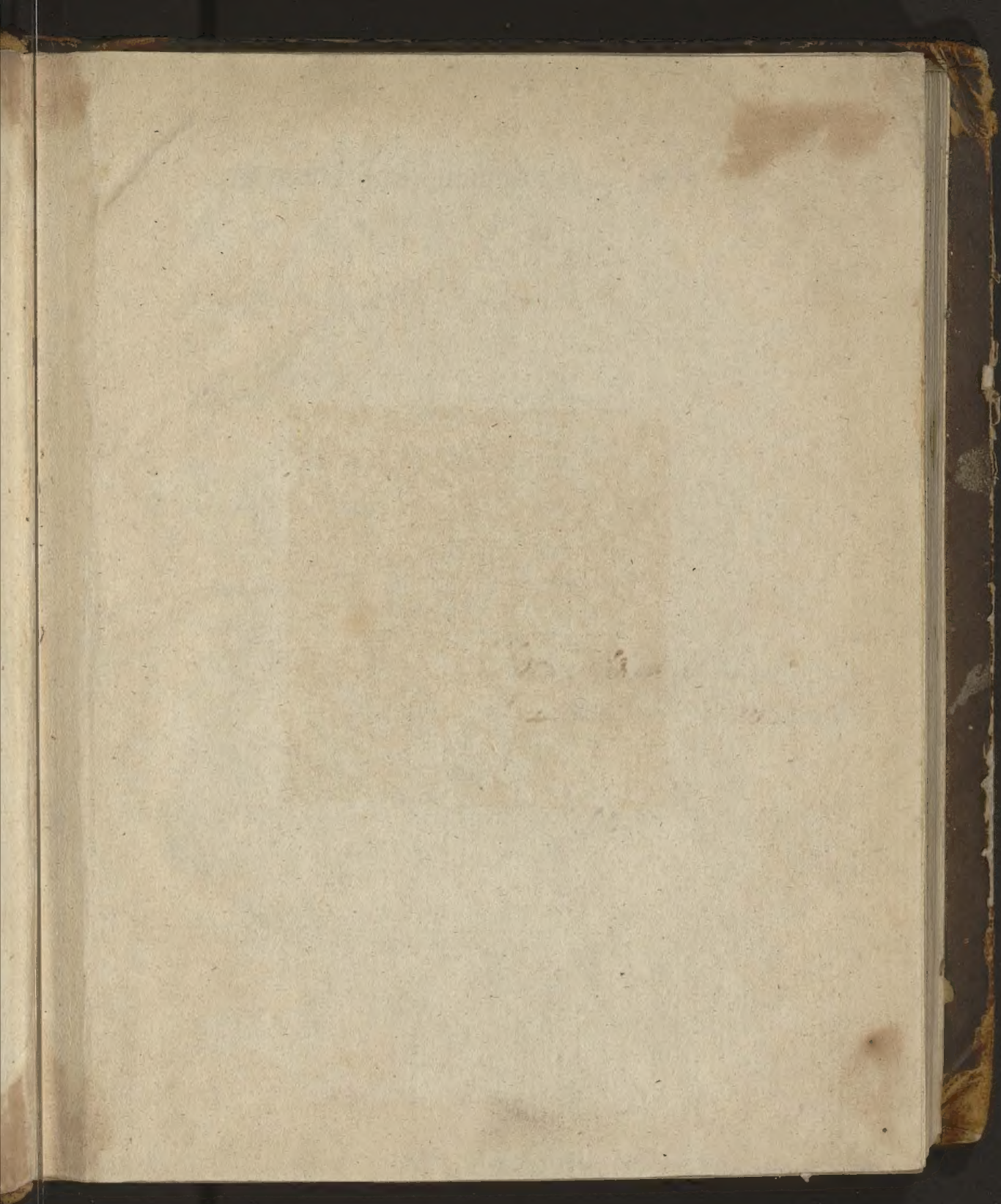
594957 II M

Mag. St. Dr.

Nr. B. 38. (1:2)

K. S. II. 1. 6. L. S

Spec. Astr. Graec. 4^e 197.



Herbert in the
house of the
Garden

No. 10

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO

TEORYA

Przystósowaná do linii krzywych

Przez

Jana SNIADOCKIEGO w Szkole Głównej Koronnej
Matematyki wyższej i Astronomii Profesora,
tęży Szkoły Sekretarza.

T O M I.

Zawierający ALGEBRĘ na dwie części podzieloną.

Cena dwóch Tomów - - - - - Zł. 12.
Znajdują się do przedania } w Krakowie w Drukarni Szkoły Głó-
wniej Koronnej.
w Warszawie u Il. XX. Piarów.

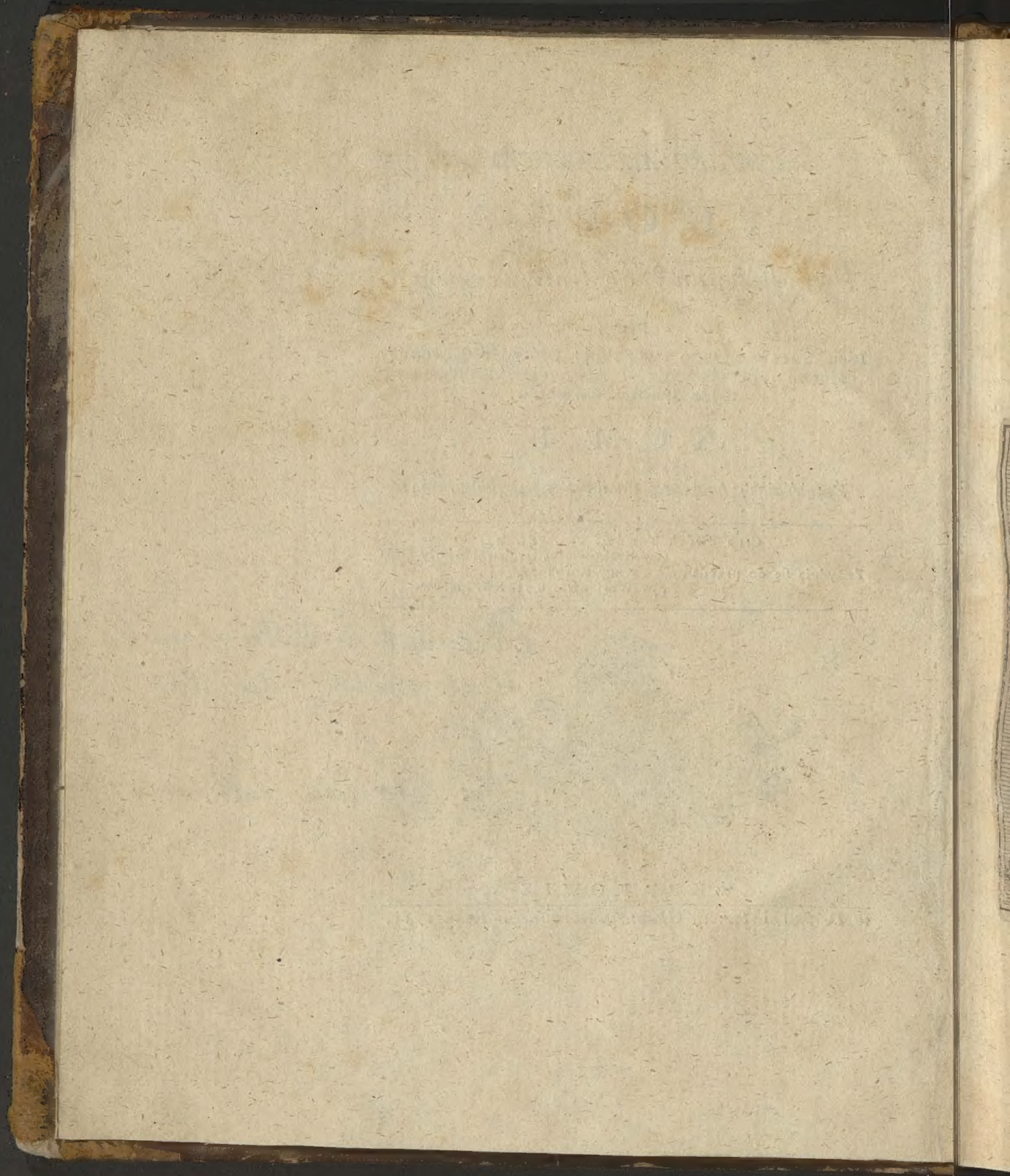


*Observatorii Astronomici
Universitatis Cracoviensis*

Joann. Anton.

W KRAKOWIE

w Drukarni Szkoły Głównej Koronnej. Roku 1783.



RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO,
TEORYA
PRZYSTOSOWANA DO GEOMETRYI
LINII KRZYWYCH

Przez

J. P. SNIADECKIEGO
w Szkole Głównej Koronnej Matematyki wyższej i
Astronomii Profesora, także Szkoły Sekretarza.

TOM PIERWSZY.
ZAWIERAJĄCY ALGEBRĘ NA DWIE CZĘŚCI
PODZIELONĄ.



w Krakowie w Drukarni Szkoły Głównej 1783.



II

BIBLIOTHECA
UNIVERSITATIS
BRACOVENSIS

594957 II

Bibl. Jag.

St. Dr. 2007. D. 239/19 (307)

CZĘŚĆ PIERWSZA

WYKŁADA SIĘ NATURA I WŁASNOŚCI FUNKCYI ORAZ ZROWNAŃ ALGEBRAICZNYCH, DZIAŁANIA W ODMIANACH FUNKCYI, I SPOSOBY W ROZWIĘZYWANIU ZROWNAŃ ZACHODZĄCE.

IV

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Pierwsze myślenia początki (a) stosowane do poznawania natury ilości, prowadzą rozum do odkrycia tych wszystkich prawideł, które w działaniach FUNKCYI iakichkolwiek i w sposobach rozwiązania ZRÓWNAN PIERWSZEGO STOPNIA, zachodzą.

§. I.

Ktokolwiek prześlawczy choć na moment bydl Uczniem ludzi, stał się uczniem doświadczenia, jeżeli był kiedy szczęśliwym choć nąypotoczniejszyą prawdę sam przez się wprzód odkryć, niżeli ją od kogo słyszał, wróciwszy się uwagą na drogę swego wynalazku dostrzeżł zapewne, że iego prawdę poprzedzić musiała w umyśle iasná przytomność rzeczy iemu przedtem dobrze znanych, do których potem przypadek iaki lub reflexyą zbliżywszy obrazy inne albo obłąkane w iego pamięci, albo przywiązane do innych iakich myśli, dały mu ię zrównać z wiadomościami i przytomnościami na ten czas; w tém porównaniu pokazał mu się nowy związek między iego myślami, z którego powstała prawda świeżo przez niego odkryta. Przyszedł więc od rzeczy znanych do nieznanych przez porównanie obrazów iakim przypadkiem lub reflexyą do siebie zbliżonych. Wszystkie wynalazki począwszy od nąygrubszych sztuk i rękodzieł aż do nąywyższych umiejętności ten sam miały początek. Umysł nasz przywiązany do zmysłów, nie miał w pierwiastkach swego poznawania iak tylko skład obrazów szczególnych, których przez czucie

Pierwsze początki myślenia któremi ludzie przychodzą do wynalazków,

A

nabył;

(a) Rozumiem przez to słowo PO CZĄTEK prawdę prawną i oczywistą będącą gruntem wielu innych prawd; i w tém znaczeniu używam będę tego słowa w całym tém dziele.

nabył: te obrazy fzczególne ścięśniały niezmiernie póty jego widok, póki przypádek lub reflexyá nie odkryły mu związku między pewnemi myślami. Ten związek rofzerzył jego poymowanie dla tego, że ie uczynił powfzechnieyfzém. Odebráwfszy niezliczoną liczbę porufzeń wyciskaiących w jego pamięci tyle obrazów rzeczy, przebiegłfszy z niemi niezmierną krainę błędu i prawdy, zrównáwfszy fzczeńliwie wieść w fobie myśli, odkrył więcéy ogólnieyfzych związków, które mu łatwo dały uczuć więkfszą doskonałość jego działáń, bo mu wyiawiły pewne prawidła ogarniające wiele przypadków przedtem w pamięci jego samotnych i nieużytych. Te prawidła prowadziły go do innych; między którymi znowu pokázáł fię łańcuch wiążący pasmo prawd ogólnych, z których umiejętności powftały: doskonałości fię potem tém bardziey i rofzerzały granice rozumowi, im do dalszey ogólności wyniefionemi zoftały, z których dopiero wynikło użycie dla towarzystwa iako skutek znowu dostrzeżonego związku między prawdą i pożytkiem. Ten ięft prawdziwy poftępek ludzkiego rozumu ftwarzaiącego tyle Nauk, które będą zawfze świadkami jego dzielności, a za fzczytém i rofkoftą towarzystwa. Takowych my drog fłatecznie fię trzymaiąc, poftawiemy fię w ftanie pięrwfzych Nauki nafzey wynalázców, i odkrywac fami przez fię będziemy te wfzytkie prawdy które ona zamyká. Wyćwiczeni dobrze w Arytmetycznych początkach i działaniach weźmy fobie do rozwiázania takowe Pytanie:

Trzech Kupców wfzedłfszy w towarzystwo handlu złożyli pewną summę kapitálu. Pierwfszy z nich dał n.p. 20.000. drugi 18.000. a trzeci 12.000. złotych Polfkich. Zyskali w pewnym przeciagu czasu 90.000 złotych: wieleż zysku każdemu z nich przypadá?

Każdy za pomocą Arytmetyki tak fobie to pytanie rozwiáže. Ponieważ zysk przypádaiący na każdego Kupca byđż powinien proporcjonalny jego summie zakładowey, będzie fię miał do téżże summy, iako fię

ma malsa całą zysku do całej masy kapitału. Za pomocą takowej proporcji znajdziemy, że na pierwszego przypadła zysku 36.000, na drugiego 32.400, na trzeciego 21.600 złot: Pol: Te ostatnie wypadki działań Arytmetycznych zacieraia nami wszystkie ślady kombinacyi, przez ktoreśmy do nich przyszli, dla tego, że są wyrażone przez znaki szczególne, iakieimi są liczby. *Liczba* bowiem będąc wyrażeniem związku między pewną wielkością, i jednością wziętą za miarę, nie tylko się odmienia z odmianą związku, a przeto gubi ślad naszego rozumowania, ale nawet rodzić się każda może z nieskończonych odmian i sposobów stóśowania wielkości. Skąd pochodzi, że spuściwszy z myśli te rozumowania które nas do wypadków ostatnich przywiodły, gubiemy razem wiadomość odmian istotnie przywiązanych do naszego pytania. Chcąc ie więc tak rozwiązać, żeby ostatni wypadek rachunku stawiał przed oczy wszystkie kombinacye, przez które do niego przechodzić należy, potrzeba na to znaków ogólniejszych nad liczby.

Uwagi pokazujące konieczną potrzebę wprowadzenia w rachunek znaków ogólniejszych nad liczby.

Gdybyśmy wprowadzili warunki iakie n.p. że ostatni z tych Kupców uchybiwszy należytej troskliwości w pewnym zabiegu, podług umowy powinien utracić dwudziestą część zysku na niego spadającego: powtóre, że summy zakładowe były oddane w różnych czasach, tak że pierwszego n.p. zakład trwał dziewięć Miesięcy, drugiego rok, a trzeciego Miesięcy 15: te kondycye zawiklą znacznie pytanie pierwsze, którego rozwiązanie potrzebować będzie daleko głębszych i trudniejszych kombinacyi. I tak chcąc nową iaką kondycyą przydadź lub dawną którą zniszczyć, przymuszenni jesteśmy za każdym razem zaczynać nasze dociekania. Ta, nieprzyzwoitość skutkiem jest także znaków szczególnych, które odmieniając się zawsze, nie dadzą nam rozeznac w ostatnim wypadku tego, co wciągnął ten lub ów warunek, a przeto co za zniszczeniem go powinno wypaść. Chcąc więc

A2

doysdź

doysdź do takowego rozwiązania, któreby ogarnęły wszystkie okoliczności w pytaniu, mogło za umorzeniem iakiego warunku odkryć nam natychmiast odpowiedź przyzwoitą, i oszczędzić pracy rozpoczęcia naszych kombinacyi; potrzeba nam także wprowadzić w działania znaki ogólniejsze nad te których Arytmetyka używa. Dwie te nieprzyzwoitości przywiązane do liczb, któreśmy dopiero spostrzegli, pokazały się zapewne pierwszym Nauki naszym wynalazcom i wciągnęły ich równie iako nas w potrzebę użycia znaków ogólniejszych do wyrażenia myśli i rozwiązania iakiegokolwiek zadania. Takiemi znakami ogólniejszemi są litery Alfabetu łacińskie a, b, c, d, e , i t. d. albo greckie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, i t. d. znaczyć mogące iakąkolwiek wielkość, n. p. przez a , możemy naznaczyć zakład pierwszego Kupca, przez b zakład drugiego, zakład trzeciego przez c , masę całą zysku wyrażać może e . Oprócz tego czasy przez które trwały zakłady trzech Kupców naznaczyć możemy przez litery t, t', t'' . Ze zaś w każdym pytaniu dwoiakiego są rodzaju ilości, znané i nieznané; iako pierwsze znaczyliśmy przez początkowe litery Alfabetu, tak ostatecznie zgodzemy się wyrażać przez litery ostateczne x, y, z , i t. d. W naszym pytaniu ilością niewiadomą, której szukamy jest część zysku spadająca na pierwszego Kupca, nazwiemy ją więc x . Jeżeli przystąpimy do nazywania innych rzeczy niewiadomych, rostrząsnąć nam wprzód należy, czyli te niezawisły od pierwszej nieznaney rzeczy x , tak że za odkryciem tej, pokażą nam się wartości tamtych. Iakóż w naszym zadaniu łatwo się przekonać, że mając część zysku przypadającą na pierwszego Kupca, będzie nam łatwo odkryć części należące się dwom ostatnim, które są proporcjonalne summom zakładowym i czasem. Przez tę uwagę tyle korzystamy, że rzeczy nieznané w pytaniu przywodzemy do iak najmniejszej liczby, i ułatwiamy niezmiernie nasze dociekania.

Prześroga w
znaczeniu ilo-
ści.

ciekania. Bez tej przestrogi gdybyśmy n. p. byli przez y , z , naznaczyli porcję dwóch ostatnich Kupców, zawikłalibyśmy byli przez tę niezręczność nasze badania, wciągnąwszy bez potrzeby trzy nieznanne ilości x , y , z , a przez to z jednego pytania, zrobilibyśmy ich byli trzy. Ta nieprzyzwoitość da nam się uczuć niżej.

§. II.

Odkrywszy ogólne znaki na cechowanie ilości, zatrzymamy się uwagą nad pytaniem podanem. Mamy w niem rzeczy znane i nieznanne, potrzeba nam więc z pierwszych przejść do ostatnich. Ale iakąż drogą? oto tą samą, którą idziemy we wszystkich myślach i poznawaniach naszych iakichkolwiek, to jest: przez związki które zachodzą między rzeczami znanymi i nieznanymi; te bowiem związki raz dostrzeżone uczą nas, że rzeczy nieznanne nic innego nie są tylko rzeczy znane zawarte w pytaniu, pewnym sposobem do siebie zbliżone i ułożone. Dostrzegłszy więc związku, całą sztukę wynalazku zależy na tém zbliżeniu rzeczy znanych do siebie. Upatrujemy nasamprzód tego związku w naszym pytaniu równiając wszystkie w niem zawarte okoliczności. Zebrawszy razem wszystkie kondycye, Pytanie nasze tak się ogólnie wyklada:

„Trzech Kupców złożyli pewny kapitał w czasie różnym. Pierwszy dał sumnę a na czas t , drugi sumnę b na czas t' , trzeci sumnę c na czas t'' . Ten ostatni uczynił niedbalstwem pewny zawód, dla którego tracić musi podług kontraktu z osłą część przypadającego zysku. Zyskali sumnę r , cóż się ka-
 „żdemu należy za porcyą odpowiadającą zakładowi,
 „przeciągowi czasu i warunkom w umowie zawar-
 „tym „?

Pierwszy związek wypadający z porównania wszystkich kondycyi pokazuje się ten: że wszystkie trzy rozdzieliły zysku, dodane sobie, wyczerpać powinny całą masę zysku r , a zatem summa trzech zysków jest równa masie r . Pamiętając o tym związku dostrzeżo-

A3

nym

Sposoby roz-
 stawione ro-
 zumowi ludz-
 kiemu docho-
 dzenia rzeczy
 nieznannych.

Znaki Mnożenia,
Dzielenia.

nym w pytaniu, pracujemy teraz nad wyrażeniem go przez znaki ogólne. Potrzeba nam naśmprzód wyrazić porcyą każdego z osobna Kupca, dodadź ie razem, i zrównać potem z e . Aże dwóch ostatnich porcyę zawisły od porcyi pierwszego nazwaney x , trzeba nam ie więc także wyrazić przez x słówowane z zakładem i czasem każdego. Do tego wynalazku doydziemy przez proporcya, w której mając trzy terminy, wynaydujemy w Arytmetyce czwarty, mnożąc drugi przez trzeci i dzieląc tę mnogość przez pierwszy. Ale działając przez litery iakże ten czwarty termin wyrażemy? Oto przez inne znaki, któremi cechować będziemy zachodzące działania: i tak mnożenie liter znaczyć będziemy przez kropkę (\cdot) lub krzyż leżący (\times) położony między literami wchodzącemi do mnożenia n. p. $x \cdot b$, albo $x \times b$ znaczyć będzie x rozmnożone przez b . Nawet litery przy sobie tuż położone bez żadnego znaku wyrażać będą mnożenie iedney przez drugą, iako to xb . Dzielenie zaś ilości wyrażać będziemy albo dwiema kropkami ($:$) położonemi między ilością podzielną i dzielącą, albo przez ułomek, którego licznik znaczyć będzie ilość podzielną, mianownik zaś ilość dzielącą, n. p. $xb:a$ albo $\frac{xb}{a}$ znaczy mnogość xb rozdzieloną przez a .

Mając już znaki na cechowanie działań, a chcąc doysdź podziałów przypadających na każdego w szczególności Kupca, stósóymy naśmprzód same summy nie mając żadnego względu na czasy. Jeżeli podział pierwszego iest x odpowiadający zakładowi a ; podział drugiego odpowiadający summie b wypada s takowey proporcji.

$$\text{Na drugiego} \quad a : x :: b : \frac{xb}{a}$$

$$\text{Na trzeciego} \quad a : x :: c : \frac{xc}{a}$$

Trzy więc porcyę zysku x , $\frac{xb}{a}$, $\frac{xc}{a}$, dopiero wynależio-

zione należą do tegoż samego czasu, który biorę za miarę porównywania czyli za jedność, iakież wypadną zyski na czasy różne naznaczone przez t, t', t'' . Ponieważ zyski odpowiadające pewnym zakładom, tak się mają iak czasy, pytanie nasze rozwiążą następujące proporcye:

Na pierwszego Kupca - - - $1 : x :: t : xt$.

Na drugiego - - - $1 : \frac{xb}{a} :: t' : \frac{xbt'}{a}$

Na trzeciego - - - $1 : \frac{xc}{a} :: t'' : \frac{xct''}{a}$

Ostatnie terminy tych proporcji $xt, \frac{xbt'}{a}, \frac{xct''}{a}$ wyraża-

ją trzy porcje zysku należyte każdego summie i czasowi, przez który trwał zakład. Nie zostaje nam tylko wyrazić przez znaki ten związek w pytaniu dostreżony, któryśmy na początku tego § wyłożyli w słowach. Potrzeba nam więc znaku, któryby wy-

raził dodanie trzech podziałów $xt, \frac{xbt'}{a}, \frac{xct''}{a}$ tak-

Znaki Dodawania, odciągania i równości.

wym znakiem, będzie krzyż prosty stojący (+) położony między terminami, które chcemy dodawać. Wymawia się ten znak u łacinników *plus* (więcej,) my go zaś wymawiać będziemy przez z , i tak $xt + \frac{xbt'}{a}$

czyta się ilość xt z ilością $\frac{xbt'}{a}$. Aże ostatni Kupiec

tracić ma dwudziestą część swojego podziału, dla pewnego zawodu; więc ta strata wyraża się $\frac{xct''}{20a}$ którą

należy odciągnąć od $\frac{xct''}{a}$ wezwiemy przeto za znak

odciągania liniykę położoną w dół między ilościami (—) która się czyta u łacinników *minus* (mniej), my

A4

zas

zaś wymawiać ją będziemy *bez*, i tak $\frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a}$ czytamy się $\frac{xct''}{a}$ bez $\frac{xct''}{20a}$. Na koniec do wyrażenia równości

zachodzący w związkach iakiegokolwiek Pytania użyjemy dwóch linii równoległych, (=) które czytać będziemy *równie*. Przeto związek zachodzący między rzeczami znanymi i nieznanymi dostrzeżony w naszym pytaniu, to jest: że *Summa trzech zysków szczególnych równa jest masie całej zysku e*; tak się w znakach ogólnych wyraża:

$$xt + \frac{xct''}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a} = e.$$

Opis Zrównania Funkcyi, i ich różnicy.

Takowe wyrażenie związku dostrzeżonego między ilościami iakiemikolwiek wchodzącemi w pytanie nazywa się ZRÓWNANIEM (*Aequatio*) w którym terminy na lewéj stronie znaku równości położone składają PIERWSZY CZŁONEK ZRÓWNANIA, terminy zaś leżące po prawéj stronie znaków, czynią ZRÓWNANIA CZŁONEK DRUGI. Gdybyśmy zaś oderwali uwagę od związku, który się wyraża w Zrównaniu, i wzięwszy sam pierwszy albo obydwaj razem Zrównania członki bez znaku równości, mielibyśmy tylko zbiór terminów zamykających ilości znané i nieznané różnie pomieszane z sobą i łączone znakami różnemi

$$\text{n. p. } xt + \frac{xct''}{a} + \frac{xct''}{a} - \frac{xct''}{20a} \quad \text{takowy wyraż na}$$

zywa się FUNKCYĄ (*Functio*), gdzie przywiązuwamy szczególnie bacność na ilość nieznaną x , wyraż dopiero wyłożony zowie się Funkcyą x . Stęgo opisanie pokazuje się zaraz różnica między Funkcyą i Zrównaniem. Funkcyą bowiem jest tylko prostem wyrażeniem terminów zamykających różne ilości iakimkolwiek sposobem z sobą zmieszane bez żadnego między niemi związku. Zrównanie zaś wyraża koniecznie albo związek dwóch Funkcyi, albo związek ilości

ilości w jednej Funkcyi zawartych. Każde zadanie przed odkryciem związku między jego kondycjami będąc zbiorem myśli rozerwanych, jest tém co my nazywamy w ilościach Funkcją, tak iako każdy rośładek i zdanie wypadające z związku dostrzeżonego między myślami to samo znaczy, co u nas Zrównanie. Pytanie któreśmy do roztrząśnienia przedsięwzięli uczy nas, że do Zrównania przychodzemy przez pewne stółunki myśli, te stółunki ciągną za sobą różne odmiany w ilościach, do wyrażenia tych odmian służą nam różne działania, na któreśmy natrafili w naszych kombinacjach. Trafiliśmy zaś na te same które zachodzą w Arytmetyce, to jest na Dodawanie, Odciąganie, Mnożenie i Dzielenie ilości. Iu-koż ilość ogólniejszemi naznaczoną cechami nie traci natury ilości zależącej na możliwości powiększania się lub zmniejszania. Wszystkie iey odmiany kończą się na tych dwóch stanach, które są składem różnych stółunków i związków. Zastanówmy się nad iakąkolwiek w nas myślą, znaydziemy w niej tyle odmian, ile mieć może sytuacji obiekt którego ona jest obrazem. Wszystkie te odmiany wypadają z pewnych stółunków téy myśli, i potrzebiuą swego ięzyka. To co się dzieie z każdą myślą, dzieć się musi z uwagą ilości: i działania Arytmetyczne są tém, czém są w każdéy myśli różne iey odmiany i wyrazy do tych odmian przywiązane. Są to więc sposoby znaczenia wzrostu lub ubywania ilości, które też same są w literach co i w liczbach, uczyniwszy pewne różnice, które będąc skutkiem więkšzey ogólności iuż nam się pokazały i pokaza ieszcze niżej.

§. III.

Użyliśmy na oznaczenie Dodawania i odciągania dwóch znaków (+, —), z których pierwszy czyni ilości Dodatnemi (*Quantitates Positivae*) a drugi Odejmneni (*Quantitates negativae*): te atoli znaki daleko mają rozlegléysze użycie. Uważając ilości same przez się, to jest iako-mogące tylko wzrastać lub ubywać,

Tłumaczy się
użycie znaku
Dodatnego, i
Odejmonego.

As

litery

literę Alfabetu wystarczaia nam na wyrażenie naszych myśli, ale zważaiąc też ilości iedne w porównaniu drugich, wpadamy uwagą na różne stany i sposoby iestestwa, w których iedna ilość zostaię względem drugiej. Takowe stany wyrażamy znakami położonemi przed literami. I tak dwa dopiero wymienione znaki (+ —) nie tylko nam służy na cechowanie Dodawania i Odcigania, ale nawet na znaczenie dwóch stanów iakichkolwiek między sobą przeciwnych iako to wzrostu i ubywania, majątku i długu, dwóch biegów lub położeń opacznych i t. d. W naszym pytaniu naznaczyliśmy znakiem dodatnym porcyę, które każdy Kupiec brać powinien z masy zysku, stratę zaś którą za uchybioną troskliwość ponieść przypadło trzeciemu, nacechowaliśmy znakiem odjemnym. Skąd się pokazuje, że ilości odjemne mają swoje iestestwo tak rzetelne i prawdziwe iak i ilości dodatne, tylko że w sposobie między sobą przeciwnym. A przeto wyobrażenie ilości odjemnych nie zawiśło od tak dzikich i obłąkanych tłómaczeń, któremi niektórzy Autorowie uczących się bałamucą. Ieżeli to iest prawo dla ludzkiego rozumu, że we wszystkich poznawaniach nie może przeniknąć do prawdy tylko drogą porównywania, rozstrząsaiąc naturę ilości wpada w konieczną potrzebę uważania ich iedne względem drugich, a przeto znaki na wyrażenie tych względów i stanów są mu nieprzerwanie potrzebne. We wszystkich więc działaniach, na któreśmy w Pytaniu natrafili nie powinniśmy rozłączać uwagi nad naturą ogólną ilości od uwagi ich stanów, w których się iedne względem drugich znajduia; bo każde iakiegokolwiek rodzaju pytanie wciąga nas koniecznie razem w obydwie te uwagi.

Opisuje się Dó. S tey Metafizyki wypadaią różne początki działai. I tak dwie albo więcey funkcyi złożonych z różnego dawanie i Odcigania Alge stanu ilości mogą się łączyć z sobą zostawiwszy wszystkie ilości przy tym samym stanie, w którym się braicenne skąd stkie ilości przy tym samym stanie, w którym się wyciągaią się przed tem złączeniem znajdowały, to iest: zostawić prawidłai na te wzię ie przy tych samych znakach, i takowe Działanie działaii nie

nie zowie się *Dodawaniem Algebraicznym*. Chcąc dodać funkcję $a+bf-c$ do funkcji $de+bf-g$ znaczymy to działanie tak: $(a+bf-c)+(de+bf-g)$, a chcąc je wykonać, nie potrzeba do tego tylko napisać je razem z dwiema znakami przy sobie, a summa będzie $a+bf-c+de+bf-g$; ilość bowiem na początku takiej funkcji napisana bez znaku, zawsze jest dodatnią, i tak de i jedno znaczy co $+de$, a i jedno jest co $+a$. Z umowy bowiem znak dodatni na początku nigdy się nie zwykł pisać. Takim sposobem złączyliśmy trzy porcje zysku xt , $\frac{xct'}{a}$, $\frac{xct''}{a}$ położywszy je przy sobie

$$z \text{ temi samemi znakami } xt + \frac{xct'}{a} + \frac{xct''}{a} = \frac{xct''}{20a}$$

wszystkie te porcje mają znaki odpowiadające pewnym względem, w których się iedne w porównaniu drugich znajdują.

Powtórę Funkcję jaką łączyć się może z drugą odmiennając we wszystkich ilościach stan ich na stan przeciwny, to jest: odmiennając wszystkie znaki na przeciwne, takowe Działanie, zowie się *Odcąganiem Algebraicznym*. Chcąc więc odcągnąć funkcję $ax+by+e-cd-b$ od funkcji $ax+by+cg+fm-e+cd+b$ znaczymy to działanie tym sposobem $(ax+by+cg+fm-e+cd+b)-(ax+by+e-cd-b)$, a chcąc je wykonać, należy w Funkcji którą odcągamy odmienić wszystkie znaki na przeciwne, to jest $+$ na $-$; $-$ na $+$; a dopiero w tak odmienionych znakach złączyć ją z funkcją tą od której ją odcągamy; wykonywając to w naszym przykładzie, wypada $ax+by+cg+fm-e+cd+b-ax-by-e+cd+b$. Rozważywszy dobrze te dwa wyłożone działania wciągając nas w uwagę znaków pokazując się oczywiście, że Dodawanie które zawsze w Arytmetyce powiększa ilość, w literach może ją powiększyć lub zmniejszyć, i tak do a dodając $-b$ w summie $a-b$ w rzeczy samej a zmniejszając ilością b . Odcąganie zaś które w Arytmetyce

As zawsze

zawfze zmniejszyła ilość, tu może ją powiększyć; chcąc od a odciągnąć $-b$, mam $a+b$ gdzie a powiększam ilością b .

Tłómaczy
się znaczenie
współczynni-
ków, i sposób
obchodzenia
się z niemi.

W złączeniu funkcyi przez obydwa te działania zachodzą terminy też same ilości zawierające, kilka razy powtórzone które zebrać się mogą w krótszy wyraz położywszy ieden z nich z liczbą zawierającą tyle iedności, ile razy ten termin znajduje się powtórzonym w funkcyi; i tak mamy w przykładzie pierwszego działania $bf+bf$, na których miejscu możemy położyć $2bf$, w przykładzie drugiego działania mamy $-e-e; +cd+cd; +b+b$, za które pisać możemy $-2e; +2cd; +2b$, zostawiwszy zawfze w tym zbiorze ten sam znak, którym były cechowane w samotności. Takowe liczby wyrażające wiele razy ilość iaką znajduje się położoną w funkcyi, nazwiemy WSPÓŁCZYNNIKAMI, (*Coëfficients*). Jeżeliby zaś terminy iakie kilka-krotnie powtórzone w funkcyi znajdowały się z znakami przeciwnemi, na ten czas zebrać należy osobno dodatne i ojemne, a wyraziwszy je przez współ-czynnik, odciągnąć potrzeba współ-czynnik większego od mniejszego, reszta będzie współ-czynnikiem terminu należącego do Funkcyi przy tym znaku, którym był naznaczony współ-czynnik większy; gdyby zaś współ-czynnik dodatny był równy ojemnemu, na ten czas oba te terminy będąc przeciwne zniszczą się razem, i tak w przykładzie działania drugiego mamy $by-by$, $ax-ax$, które wypadają z funkcyi; bo ilości nie mając żadnego współ-czynnika wyraźnego, mają za współ-czynnik iedność. Zostaje się więc funkcyja prościęyszym sposobem wyrażoną ale iedney wartości z przeszłą: $cg+fm-2c+2cd+2b$. Gdybyśmy zaś mieli $4x-3x$ albo $3bf-6bf$, na miejscu pierwszych napisalibyśmy x , a zaś $-3bf$ na miejscu drugich. Ten sposób przywiedzenia do prościęyszego wyrazu funkcyi iakieykolwiek jest oczywistym wypadkiem z początków dopiero wyłożonych, gdzie nam nie trzeba zapomnieć, iż się nie rościaga tylko do

do terminów jednej natury, to jest zamykających ty-
leż i też same litery. Współ-czynniki więc różne nie
oznaczając tylko różne powtórzenie ilości jakiej nie
odmieniają nic w jej naturze, i tak *6a* jest téż saméj
natury co i *12a*. Są one tém, czém są liczby
mnożące w Arytmetyce, które jako wiemy natury
liczby mnożnéj nie odmieniają w mnogości.

Współ-czynniki więc oznaczając pewné powtórze-
nie ilości, wyrażają mnożenie Arytmetyczne, gdybyś-
my zaś chcieli ilość jakąkolwiek x , powtórzyć nieo-
znaczonym razem b , to jest tyle razy, ile warta b , i
w takim względzie w jakim zóstaie b , otrzymaliby-
śmy ilość rozmnożoną bx , gdzie b jest współ-czynni-
kiem nieoznaczonym; Działanie nasze pod ten czas
nazywają się *Mnożeniem Algebraicznym*, które jeżeli
tylko chcemy naznaczyć, używamy do tego znaków
wyżej wyłożonych s tą przestrogą, iż jeżelibyśmy
chcieli oznaczyć mnożenie funkcji jakiej s kilku ter-
minów złożonej przez drugą jaką funkcją, potrzeba
nam obie te funkcje zawrzeć nawiasami lub po
nad nie kreskę pociągnąć, i tak $(ax+3by+2dz)(b+2d)$

albo - - - $ax+3by+2dz \cdot b+2d$, znaczy mnoże-
nie funkcji $ax+3by+2dz$ przez $b+2d$, podobnie $(cm+ny)n$,
lub $cm+ny \cdot n$ znaczy mnożenie $cm+ny$ przez
 n . Jeszcze $(ax-bx)(bc+cd)(l+m)$ znaczy tyle
Mnożników (*Factor*) wchodzących w działanie
ile jest przedzielonych nawiasami funkcji lub ilo-
ści. Wykonywając zaś w rzeczy samej mnożenie
kładziemy tuż przy sobie ilości n.p. abc znaczy a
rozmnożone przez b , i znowu rozmnożone przez c .
W tém miejscu należy nam się ostrzedz, że w jakim-
kolwiek porządku położymy ilości w mnogości, nie
nie odmieniamy w ich wartości, i tak zamiast abc
możemy pisać bxc albo cxb , albo bcx , nie odmieni-
wszy nic w naturze mnogości; znaki bowiem ogólne
ilości nie będąc tak przywiązane do pewnej ozna-
czonej wartości iak są liczby, nie zawisły bynajmniej
w iwym

Opisuje się
Mnożenie Al-
gebraiczne, z
czego wycia-
ga się różne
prawdła.

w swém znaczeniu od porządku. Tu jeszcze wpada nam oczywiście w oczy, że jeżeli ilości tuż przy sobie położone znaczą funkcją rozmnożoną, możemy takową funkcją rozebrać na mnożników, oddzielwszy litery znajdujące się we wszystkich terminach funkcji, od innych: i tak pierwszy człon naszego

Zrównania $xt + \frac{a}{a} + \frac{a}{a} + \frac{a}{20a}$ wyrazić się może

tak: $x \left(t + \frac{bt}{a} + \frac{ct}{a} + \frac{ct''}{20a} \right)$ ponieważ x znajduje

się we wszystkich terminach jest mnożnikiem całej funkcji.

Gdy nam przypada ilość lub funkcją iaką samę przez się mnożyć, obchodząc się podług przyjętego znaczenia kładziemy przy sobie ilość lub funkcją tyle razy, ile razy wchodzi w mnożenie, n.p. xxx . w tym przypadku zgodziemy się na prostiejszy wyrz takowey mnogości kładąc nad ilością lub funkcją liczbę zamykającą tyle jedności ile razy ta ilość lub funkcją wchodzi za mnożnika w mnogości, i tak xxx wyrażemy krócéy x^3 , $xxbbccc$ wyrażemy $x^2 b^2 c^3$ takowe liczby położone nad ilościami nazywać będziemy WYKŁADNIKAMI (Exponentes). Chcąc więc ilość lub funkcją iaką z Wykładnikiem mnożyć przez tę samę ilość lub funkcją z Wykładnikiem, nie potrzeba nam iak tylko dodać do siebie wykładników, a tak summa wykładników będzie wykładnikiem mnogości: pamiętając na to, że ilość lub funkcya nie mając żadnego wykładnika, uważa się z wykładnikiem 1. n.p. x jedno znaczy co x^1 podług tego prawidła chcąc x^2 mnożyć przez x^3 otrzymam mnogość x^5 , podobnież $(x+a)^2 \cdot (x+a) = (x+a)^3$. i t.d.

Zatrzymamy się teraz nad odkryciem prawideł Mnożenia zachodzącego w funkcjach złożonych z wielu terminów. Funkcye takowe zamykają ilości, Współ-czynniki, Wykładniki i Znaki. Co się tycze wykła-

Znaczenie
Wykładników

wykładników, dopiero nauczyliśmy się z niemi obchodzić w mnożeniu. O ilościach zaś tyle wiemy z umowy, że w mnogości nie należy nam iak tylko pisać ich tuż przy sobie: a ponieważ według opisu mnożenia ilość mnożna tyle razy być powinna powtórzona ile warta ilość mnożąca, więc należy nam wszystkie terminy w téj funkcyi zawarte przez tę ilość mnożyć: tak n. p. w $(xa+2by+c)$ d, przez d należy mnożyć każdy termin Funkcyi $xa+2by+c$, a stąd wypadnie mnogość $xad+2bdy+cd$. S tego samego początku wypływa: że kiedy nam przychodzi mnożyć funkcją przez funkcją n. p. $(xa+x^2b+c)$ $(yc+bx+m)$, należy nam całą funkcją $xa+x^2b+c$ mnożyć przez każdy z osobna termin funkcyi $yc+bx+m$ to jest:

Funkcyá Mnożná - $xa+x^2b+c$

Mnożąca - $yc+bx+m$

Mnożąc przez yc - $xayc+x^2byc+yc^2$

Mnożąc przez bx - $bx^2a+b^2x^3+bx^2c$

przez m - $max+mx^2b+mc$

Tę dopiero łączgólnę mnogość razem dodane i ułożone podług wykładników x daia mnogość całką:

$$b^2x^3+bx^2+mbx^2+bycx^2+aycx+max+bcx+c^2y+mc$$

Tymże samym sposobem należy nam postępować mając do mnożenia więcej funkcyi: i tak gdyby nam przyшло dwie wymienione funkcye $(xa+x^2+c)$ - $(yc+bx+m)$ mnożyć ieszcze przez trzecią $az+by+n$, należałoby nam całką dopiero wynalezioną mnogość mnożyć przez każdy z osobna termin trzeciej téj funkcyi, a tym sposobem przyzlibyśmy do mnogości trzech wzmiankowanych funkcyi.

Mając do mnożenia Współczynników przed ilościami, prosta uwaga nad ich naturą przekonywa nas, że ich należy samych przez się mnożyć, a wypadającą stąd liczba rozmnóżona będzie współ-czynnikiem mnogości Algebraicznej. Iakóż chcąc $2x$ mnożyć przez $3c$ potrzeba $2xc$ trzy razy ieszcze powtórzyć, s czego

wypadnie

wypadnie $6xc$; podobnie $(6ax+2b)10.x$ daie w mno-
gości $60axx + 20bx$.

Prawidło ■
znaki wycia-
gą się z opisu
mnożenia.

Zostaie nam teraz wynaleźć prawidło na znaki. Wróćmy się myślą do naszych początków. Powie-
dzieliśmy naprzód s przekonanią że w działaniach
iakichkolwiek nigdy nie możemy odłączyć uwagi
ogólnej nad ilością od uwagi nad iey stanem w któ-
rym się iedna względem drugiey znajduje. Nauczy-
liśmy się powtórę z opisu mnożenia że ilość mnożna
nie tylko bydz powinna tyle razy powtórzoną ile
wartą ilość mnożąca, ale iefzcze bydz powinna w
tym samym względzie powtórzoną, w iakim zostaie
taż ilość mnożąca; więc kiedy nam przychodzi $xa-b$
mnożyć przez a , ponieważ a ma znak Dodawania;
znak zaś Dodawania wyraża złączenie ilości zosta-
wiwszy ie przy tych samych znakach przy których
przedtem zostawały, idzie zatem że mnogość która
bydz zawsze powinna iednej natury z ilością mno-
żną, powinna miec też same znaki, które ma ilość
mnożna, zaczęm $(xa-b)a$ daie mnogość $xaa-ba$.
W pierwszym terminie xaa mnogości, mnożyliśmy
znak dodatny $+xa$ przez znak dodatny $+a$; i wy-
padł nam znak dodatny $+xaa$; w drugim $-ba$ mno-
żyliśmy znak odjemny $-b$ przez znak dodatny $+a$
i otrzymaliśmy znak odjemny $-ba$. Więc w mno-
żeniu $+$ przez $+$ daie $+$; zaś $-$ przez $+$ daie $-$.
Mając zaś do mnożenia $xa-b$ przez $-c$, ponieważ
 $-c$ ma znak odcigania; znak zaś odcigania każe
nam odmieniać wszystkie znaki; idzie za tém, że
mnożąc przez $-c$, w każdym terminie funkcyi $xa-b$
odmienić powinniśmy znak na znak iemu przeciwny,
i tak wypadnie mnogość $-xac+bc$. Tu ~~znów~~ mno-
żąc znak dodatny $+xa$ przez odjemny $-c$, otrzy-
maliśmy iak w pierwszym przykładzie znak od-
jemny $-xac$; mnożąc zaś znak odjemny $-b$ przez
znak odjemny $-c$, otrzymaliśmy znak dodatny $+bc$.
Łącząc więc ten wypadek z przeszłym, wyciągniemy
prawidło ogólne na znaki w mnożeniu: to iest że: w
mnożeniu

W mnożeniu, też same znaki bądź to dodatny + przez dodatny +; bądź odiyenny — przez odiyenny —, daia zawsze w mnogości znak dodatny; znaki zaś różne to iest dodatny + przez odiyenny —, albo odiyenny — przez dodatny +, daia zawsze w mnogości znak odiyenny —. Zebrawszy razem te wszystkie prawidła któreśmy s tak prostych i oczywistych wyciągnęli początków, użyjemy ich w następującym przykładzie:

$$\begin{array}{r} \text{Mnożyć} \quad ax^2 + 2by - c \\ \text{przez} \quad 3dx - m \end{array}$$

Mnogość $3adx^3 + 6bdyx - 3dxc - max^2 - 2bym + mc$
Dla więkzey wprawy czytelnika przyłączamy tu Tąblicę różnych przykładów.

W każdéy Nauce pewnéy chcąc dostać prawdy iakiéy ogólnéy, nie dosyć nam iest rozwiązać iakowé zadanie prowadzące nas do ważnych iakich początków, ale ieszcze dla dostatecznego przekonania powinniśmy rozwiązać zadanie wywrotne; to iest: wrócić się od ostatnich wynalezionych wypadków do pierwiastków naszego zadania. I tak od części przyszedłszy do pewnego składu, należy nam ieszcze od tego składu wrócić się do części, s czego dwoiako korzystamy; naprzód zostawiamy rozum nasz w nieprzepartéy pewności o naszych początkach; powtóre odkrywamy nowe prawdy rostrzajając przypadki przeciwne pierwszemu. W poprzedzającym działaniu odkryliśmy prawidła prowadzące nas od Mnózników do ilości rozmnożonéy; teraz chcąc od ilości rozmnożonéy zniżyć się do Mnózników, potrzeba nam ten skład który z mnożenia funkcyi powstał rozebrać, i odkryć pewne przepisy prowadzące nas do tego rozbioru. W takowém zadaniu zachodzą trzy rzeczy: funkcyja podana, i dwie funkcyje prościéysze składające pierwiż. Tamta nazywá się funkcyą Podzielną, iedna z dwóch ostatnich funkcyą dzielącą. Z dwóch tedy funkcyi znanych, to iest podzielnéy i dzielący, wynaleśdź trzecią, którą nazwanó wielorazém, znaczy dzielić funkcyą iedną przez drugą. S tego Opisu wynikają na-

Dzielenie Algebraiczne i reguły mu służące.

stępujące prawdy: Jeżeli funkcją dzielącą wchodzi całkiem w skład funkcji podzielnej, dzielenie odbyć się może zupełnie, a przeto wieloraz otrzymać powinniśmy w wyrazie skończonym: jeżeli zaś funkcją dzielącą nie jest prawdziwym elementem funkcji podzielnej; rozbiór tej funkcji być nie może doskonałym, a zatem wieloraz wypaść musi z ostatekiem nie zupełnie podzielnym. Ponieważ więc w dzieleniu zachodzi jeden warunek, to jest: jeżeli funkcją ma być doskonale podzielną, potrzeba aby funkcją dzielącą całą była składająca się częścią; ten warunek czyni to działanie szczególniejszem nad mnożenie i jest przyczyną, dla czego nie każde dzielenie być może doskonałe kiedy każdą mnogość staie się zupełną z jakichkolwiek mnożników.

Przystapmy już do wynaydowania prawideł dzielenia na ilości, współ-czynniki, wykładniki i znaki. Ponieważ dzielenie rozebrać powinno ten skład, który z mnożenia powstał, idzie za tem że prawidła jego być powinny przeciwne tym, któreśmy na Mnożenie odkryli. Więc jeżeli mnożąc kładziemy tuż przy sobie litery Mnożników; dzieląc powinniśmy mazać w funkcji podzielnej litery funkcji dzielącej; i tak xb chcąc rozdzielić przez b , mażę b w funkcji podzielnej, i zostaje się na wieloraz x , to jest: $\frac{xb}{b}$,

daie x . Powtóre szukając mnogości mnożyliśmy współ-czynniki przez się, więc szukając wielorazu dzielić powinniśmy współ-czynnik funkcji podzielnej przez współ-czynnik dzielącej: n.p. chcąc $12xb$ rozdzielić przez $3b$; dzielę 12 przez 3 , potem zmażawszy b podług prawidła 1go, otrzymuję wieloraz $4x$. Nakoniec w mnożeniu dodawaliśmy do siebie wykładniki, więc w dzieleniu należy nam odciągać wykładnika funkcji dzielącej od wykładnika podzielnej, i takim sposobem $12x^4b^2$ rozdzieliwszy przez $3x^3b$ otrzymam za wieloraz $4xb$. S kąd się wnosi oczywiście iż gdyby nam przypadło dzielić takie funkcy,

keye, w którychby wykładnik dzielący był większy od wykładnika podzielny, wieloraz wypadnie z wykładnikiem odjemnym równający się ułomkowi mającemu za licznika jedność, a za mianownika tenże wieloraz z wykładnikiem dodatnym n. p.

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2} \text{ skąd się wnosi że wyrazy}$$

$$x^{-2}, y^{-3}, ba^{-m}, \text{ równé są tym } \frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^3}, \frac{b}{a^m}, \text{ i t. d.}$$

Cóż za prawidła będą na znaki? Przypomniemy sobie że w mnożeniu znaki też same wydały nam zawsze znak dodatny mnogości; znaki zaś różne rozdziły znak odjemny. Więc ponieważ wieloraz z funkcją dzielącą są dwiema częściami, z których przez mnożenie powstać powinna funkcja podzielna; znaki wielorazu tak powinny odpowiadać znakom funkcji dzielącej, ażeby z nich wypadły koniecznie w mnożeniu znaki funkcji podzielnej: i tak mając do dzielenia x^2b przez b , ponieważ funkcja podzielna x^2b ma znak dodatny, który nie mógł powstać, tylko z znaków tychże samych, idzie zatem, że wieloraz mieć powinien tenże sam znak, który ma funkcja dzieląca; przeto $+x^2b$ rozdzielone przez $+b$ daie $+x^2$ to jest: znak dodatny rozdzielony przez znak dodatny, daie w wielorazie znak dodatny. Taż sama przyczyna przekonać nas powinna, że dzieląc x^2b przez $-b$ wieloraz wypadść powinien $-x^2$; przeto znak dodatny rozdzielony przez znak odjemny daie w Wielorazie znak odjemny.

Jeżeli zaś mamy $-x^2b$ dzielić przez b ponieważ $-x^2b$ nie mogło w mnożeniu powstać tylko z znaków przeciwnych, więc Wieloraz mieć powinien znak przeciwny znakowi funkcji dzielącej, zaczęm $-x^2b$ rozdzielone przez b daie $-x^2$ to jest: znak odjemny rozdzielony przez znak dodatny daie w Wielorazie znak odjemny. Nakoniec mając $-x^2b$ dzielić przez $-b$ z dopiero powiedzia-

Prawidło na
znaki w Dziel
eniu.

nęgo dowodu wypadá w Wielorazie $+x^2$. Więc znak odjemny rozdzielony przez znak odjemny daie w Wielorazie znak dodatny. Zebrawszy te wszystkie przypadki razem, pokazuje się że prawidło na znaki w dzieleniu iest toż samo, ktoresmy wyciągnęli na mnożenie ilości, to iest: że znaki też same bądź to $+$ przez $+$, bądź $-$ przez $-$, rodzą w Wielorazie znak dodatny; znaki zaś przeciwné to iest $+$ przez $-$, albo $-$ przez $+$, wydają znak odjemny. Do tych wszystkich prawideł zostaie nám ieszcze przydadź iedną uwagę: Wyciągnęliśmy byli z natury mnożenia ten przepis: że potrzeba funkcją mnożną całą mnożyć przez każdy z osobna termin funkcyi mnożący, s tąd wypadá tyle mnogości szczególnych, ile iest terminów funkcyi mnożący, s których dopiero razem zebranych powstaie mnogość całka. Temu prawidłu odpowiadac powinno przeciwné w dzieleniu. Funkcja namprzód podzielna uważana byđ powinna iako powstająca z tylu mnogości szczególnych, ile terminów zamyká wieloráz, każdy więc termin wielorazu zniszczyć powinien iedną mnogość szczególną w funkcyi podzielnej. Zaczém przez każdy termin Wielorazu świeżo wynaleziony, mnożyć powinniśmy całą funkcją dzielącą, i mnogość s tąd wypadającą odciągnąć od funkcyi podzielnej: resztę zaś pozostałą w funkcyi podzielnej dzielić znowu przez pierwszy termin funkcyi dzielący, powtarzając za każdym razem mnożenie terminu nowego w Wielorazie przez całą funkcją dzielącą, i odciąganie téy mnogości od funkcyi podzielnej. Przeto aby to działanie wypadáło porządnie, należy funkcją podzielną ułożyć podług wykładników iakowéy ilości, poczwwszy od najwyższego skończyć na najniższym, lub na tych terminach w których się ta ilość główna naszego porządku nie znajduje; a to dla tego, że w mnożeniu taki zachodzi układ ilości, iako każdego przykłady przekonają. Przytósóymy teraz te prawidła do dzielenia funkcyi.

Funkcja

Funkcyą Podzielną, $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$ } Wieloraz
 Dzielącą, $x - a$ } $x^2 - 2ax + a^2$

Mno: z x^2 , przez funk: dzi: $x^3 - ax^2$

Reszta pozostała z odciag: $-2ax^2 + 3a^2x - a^3$

Funkcyą Dzielącą $x - a$

Mnog: z $-2ax$ przez funk: dziel: $2ax^2 + 2a^2x$

Reszta z odciagnienia $-a^2x - a^3$

Funkcyą Dzielącą $x - a$

Mnogość z a^2 przez funkcyą dzielącą $a^2x - a^3$

Reszta 0

to jest: pierwszy termin x^3 Funkcyi podzielney dzielę przez x , wypada na wieloraz x^2 , przez ten termin wielorazu mnożę funkcyą dzielącą $x - a$, i powstaie s tąd mnogość szczególna $x^3 - ax^2$; odmieniam w niej znaki na przeciwne podług przepisów odciągania, i odtrąciwszy ją od funkcyi podzielney, wypada reszta $-2ax^2 + 3a^2x - a^3$, której pierwszy termin $-2ax^2$, dzielę przez pierwszy termin x funkcyi dzielącej, otrzymuję nowy termin wielorazu $-2ax$, przez który mnożę funkcyą dzielącą i tę mnogość odciagam od pozostałej funkcyi podzielney. Toż samo powtarzając dalej, przyjdę do wyczerpania zupełnego funkcyi podzielney otrzymawszy zero za resztę którą kończy moje działanie.

Gdybyśmy zaś mieli do dzielenia funkcyą podzielną przez funkcyą dzielącą taką, któraby nie była cząstką składającą pierwszy; działając podług dopiero wynalezionych przepisów, wieloraz rościagnie się bez końca, iako każdego przekoná przykład pod znakiem (B) podany na Tablicy przykładów, która się dla wprawy Czytelnika przyłącza.

Pozostały nam jeszcze Funkcye łomane: w nich té same działania zachodzą, któreśmy wykonywali w całkich. Wiemy namprzód z Arytmetyki, że ułamek nic innego nie wyraża, tylko stosunek dwóch

B₃

ilości

Z natury Fun-
kcyi ułomko-
wych wypada-
ia prawdzi-
działań w nich
zachodzące.

ilości zachodzący między miarą porównywania za-
wartą w mianowniku, i pewną iaką wielkością któ-
rą zowiemy licznikiem; i dla tency to przyczyny wy-
raz ułomkowy wzięliśmy sprawiedliwie za znak
dzielenia. A ponieważ natura iakiejkolwiek ilości
zawisła od jedności, z którą ją stosujemy; zawisła od
mianownika wyrażającego też jedność. Przeto jeżeli
nie można dodawać lub odcigać ilości tylko jedney
natury; nie można dodawać lub odcigać ułomków,
nie przywiodłszy ich do téż saméj jedności czyli
do jedney powszechnéj miary porównywania. Prá-
wda: że znaki dodawania lub odcigania wyżej obra-
né wystarczają nam do cechowania tych działań na-
wet między ułomkami różney natury; ale chcąc wy-
konać to, o czém nas té znaki ostrzegaia, istotną jest
kondycyą przywieść je do jedney powszechnéj mia-
ry, czyli do jedného mianownika, nie odmieniwszy
nic w ich szczególnych wartościach: i tak chcąc do-
dadź lub odcigać ułomki $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ do, lub od ułom-

ku $\frac{xb}{m}$ znaczemy pierwśze s tych działań przez $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

+ $\frac{xb}{m}$ drugie zaś przez $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{xb}{m}$: chcąc zaś wykonać

obydwa té działania należy ułomek $\frac{x}{a}$ przywieść do
mianowników b, m , razém; ułomek $\frac{y}{b}$ do miano-
wników a, m ; ułomek nakoniec $\frac{xb}{m}$ do mianowników

a, b ; ócaliwszy każdego wszczególności wartość. To
wykonać się iedynie może przez mnożenie i dzielenie
razém ułomku przez té samé mianowniki, do któ-
rych go chcemy przywodzić. Tym bowiem sposobem

$\frac{xbm}{abm}$ — tyle będzie wartoś ilé $\frac{x}{a}$ $\frac{yam}{abm}$ — tyle co $\frac{y}{b}$ $\frac{xab^2}{abm}$
tyle

xb
tyle, co $\frac{xb}{m}$. S czego wypada prawidło przywodzenia

ułomków do iednego mianownika: rozmnożyć każde-
go licznika przez tych wszystkich mianowników, do
których chcemy przywodzić ułomek, i mnogość ze
wszystkich razem mianowników podpisać za miano-
wnika każdemu ułomkowi; znaki zaś zachodzących
działań zostawić przy liczniku każdego ułomka. Itak
w trzech podanych ułomkach zachowane prawidło

$xbm + yam + xab^2$
przyprowadzi nas w dodawaniu do $\frac{\quad}{abm}$;

w odciąganiu zaś do $\frac{xbm + yam - xab^2}{abm}$.

Stego przepisu wypada sposób przerobienia ilości
lub funkcji całkię na ilość lub funkcję łomaną iakię-
gokolwiek mianownika; chcąc n.p. xt przywiesdz do
mianownika a , przez dopiero podane prawidło otzy-

$\frac{xta}{a}$
mam $\frac{xta}{a}$. Maiąc więc do czynienia s funkcją zawie-

rającą terminy całkie i ułomkowe, dla wprowadzenia
iednołtajności w działanie, zaczynam od przywiedze-
nia wszystkich ułomków do iednego mianownika; po-
wtóre ilości całkie przerabiam na ułomkowe tego
spólnego mianownika. W zrównaniu do którego nas

$\frac{xbt'}{a} + \frac{xct''}{a} + \frac{xct''}{20a}$
zadanie przywiodło, mamy: $xt + \frac{\quad}{a} + \frac{\quad}{a} + \frac{\quad}{20a}$; w

czem postępując sobie podług wyłożonego przepisu
przerobiemy tę funkcję na inną iednołtajną, ale toż

$\frac{20axt + 20xbt' + 20xct'' - xct''}{20a}$
samo znaczącą: $\frac{\quad}{20a}$ czyli:

$$\frac{x(20at + 20bt' + 20ct'' - ct'')}{20a}$$

B4

Chcąc

Chcąc dóysdz prawidła na mnożenie iednego ułomku przez drugi, weźmy do tego działania $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{c}$ gdy by nam przyfzło $\frac{x}{c}$ mnożyć przez licznika samego a drugiego ułomku; należałoby nam $\frac{x}{c}$ tyle razy powtórzyć, ile warty a ; zaczęm mnożylibyśmy licznika ułomku $\frac{x}{c}$ przez a , czego wypadá $\frac{xa}{c}$; teraz chcąc $\frac{x}{c}$ mnożyć przez $\frac{a}{b}$ mnogość $\frac{xa}{c}$, bydz powinna tyle razy zmniejzć, ile warty b ; a zatem należy przez b mnożyć mianownika pierwszey mnogości, i wypadnie $\frac{ax}{bc}$. Więc w mnożeniu ułomków należy liczników przez liczników, i mianowników przez mianowników mnożyć.

Gdyby nam zaś $\frac{x}{c}$ przypadło dzielić przez a , należałoby ułomek $\frac{x}{c}$ tyle razy zmniejzzyć, ile warty a ; przeto mnożylibyśmy mianownika ułomku $\frac{x}{c}$ przez a , skąd wypadá $\frac{x}{ac}$; chcąc zaś $\frac{x}{ac}$ dzielić przez $\frac{a}{b}$, potrzebaby wieloráz $\frac{x}{ac}$ powiękzyć wielkością b , to iest rozmnożyć go przez b , skąd wyniknie $\frac{xb}{ac}$ wieloráz

$$\frac{x}{c} : \frac{a}{b}$$

$\frac{x}{c} : \frac{a}{b}$. Toż samo przypadnie czynić chcąc mnożość

$\frac{ax}{bc}$ rozebrać tak, ażeby otrzymać ułamek mnożny $\frac{x}{c}$.

Więc w dzieleniu ułamków należy je mnożyć na wywrot, to jest: mnożnika ułamku podzielonego przez mianownika ułamku dzielącego, i mianownika ułamku podzielonego przez licznika ułamku dzielącego.

§. IV.

Nauczyliśmy się dotąd odbywać pierwsze działania Arytmetyczne w literach, na któreśmy natrafili rozstrzaśając podług prawdziwych prawideł myślenia podane sobie do rozwiązania na początku tego rozdziału pytanie. Cofnąwszy się myślą do zaczęcia naszych docieczeń, pamiętamy namprzód że dostrzeżony między warunkami naszego pytania związek przy-

Zbiór krótki
wyłożonych
wyżej począt-
ków wracają-
cy nas do na-
tury Zrównań.

prował nas do zrównania $xt + \frac{xt'}{a} + \frac{xt''}{20a} = e$,

któreśmy potem tak nauczyl się wyrazić - - -

$x(20at + 20bt' + 20ct'' - ct'') = e$; w tém Zrównaniu uwá-

20a

żając tylko zbiór różnych ilości bez żadnego związku, przyszlismy do wyobrażenia sobie funkcyi. Natura funkcyi wciąga nas w uwagę różnych odmian, którym podpadac mogą ilości podług gatunku i okoliczności pytania. Uczulismy się potrzebę znaczenia takowych odmian; i przybralismy sobie do tego różne znaki działań, z których jedne służą nam na wyrażenie odmian ilości co do stanu i położenia, drugie zaś znaczą odmiany wartości: załstanowiwłszy potem myśl nad temi działaniami, spostrzegliśmy ich wielką ogólność, która nas przywiodła do rozleglejszych uwag, té zaś do powszechnych prawideł podających nam sposoby postępowania sobie z jakiegokolwiek funkcjami, do którychby nas przyprowadzić

Bs

mogły

mogły różne pytania. Takowe prawidła iako pewne wypadki naszych stófunków i rozumowań wyrażając w różnym układzie ilości wchodzących w skład funkcyi, ustanowiliśmy pewien ięzyk, czyli sposób znaczenia zwieźle i krótko naszych myśli, kombinacyi o ilościach, ich własnościach i odmianach, który nazwano RACHUNKIEM (*calculus*). Przypadek więc szczególny jakim było nasze pytanie ogarniony rozległszy tą uwagą uczynił nasze poznanie doskonałszem, bo nam dał odkryć tyle prawd powszechnych, ileśmy znaleźli prawideł różnych działań; między którymi należy rozróżnić te, które od umowy zawisły, od tych, które wypadły z natury działań: tamte bowiem są arbitralne, te zaś konieczne i nieodmienne. Oświeceni takową różnicą przekonamy się, że lubo rachunek odbywa się przez znaki od upodobania zawisłe, wypadki atoli jego są konieczne pewne i nieprzeparté, jeżeli są dobrze z niewątpliwych prawd wyciągnięte; tak iak dobre rozumowanie wypadające z początku pewnego i prawej kombinacyi jest nieomyślne, chociaż je wyrażamy słowy *arbitralnemi*: w obydwóch bowiem przypadkach dostrzeżone ostatnie prawdy zawisły od początków myślenia albo od natury rzeczy, ale nie od znaków.

Po tych wszystkich działaniach, przez które przechodzić nam w każdym dociekaniu należy, idąc od stófunku do związku, od związku do odkrycia rzeczy nieznaney; staraymy się już wynaleźć to, cośmy sobie zadali. Pamiętamy, że rozwiązanie naszego pytania zależy od wynalezienia części zysku przypadającego na pierwszego Kupca, którąśmy nazwali x ; jeżeli więc potrafiemy w Zrównaniu

$$x(20at + 20bt + 20ct - ct'')$$

— $= s$, wyrazić x przez same rzeczy znane a, b, c, t , i t. d. i przenieść wszystkie rzeczy znane przy x , na drugi człon zrównania do e ,

do c , zostawiwszy w pierwszym członku samo x , i nie naruszwszy związku między ilościami raz dostrzeżonego, rozwiążemy podane równanie i wynajdziemy to, czego szukamy. Jakże tego dokazać? oto ta sama sztuka, której używamy w najpoczciwiejszym myśleniu, gdy prawdę jaką nieznaną w liczbie innych prawd postrzeższy, chcemy ją wydobyć z zamieszania tych obrazów w których jest utopiona a z którymiś ją związali: pracujemy jeszcze na ten czas nad związkiem raz upatrzonym, oddzielając dostrzeżoną prawdę od tego co nią jest oczywistość, a zbliżając do siebie obrazy ściśle się z sobą wiążące, tak dalece, że cała praca nasza zależy na odmianie porządku w łańcuchu naszych myśli. Czyniemy na ten czas nowe porównywanie, uważając wszystkie myśli związanych znówu szczególniejsze między sobą związki, i zbliżając do siebie te, które się bardziej z sobą trzymają; a to końcem wystawienia sobie nowo odkrytej prawdy w najjaśniejszym widoku.

Ten sam sposób zachodzi w rozwiązaniu równań; ale odmieniając w równaniu raz wprowadzony porządek między rzeczami znanymi i nieznanymi, aby tę ostatnie oddzielić i wyrazić przez pierwsze, na jakimże gruncie zakładamy tę wolność odmiany; i co nas może upewnić, że w tej odmianie nie naruszemy raz dostrzeżonego i wyrażonego związku? Na ułatwienie tego pytania cofniemy się do rostrząsania już założonych od nas początków. Powiedzieliśmy że odkrywamy nowe prawdy, przez związek upatrzony między rzeczami znanymi i nieznanymi: ale cóż to znaczy *związać* prawdę jedną z drugą, i na czym ten związek zależy? związać jedną prawdę z drugą, jest to dostrzec, że jedna prawda z pewnych myśli złożona, jest to to samo co i druga prawda złożona z innych myśli, albo też z tych samych ale innym sposobem do siebie stosowanych; tak dale-

Drogi zwyczajne myślenie stosowane do rozwiązania Równań.

Bę

ce: że

ce: że związek między prawdą i prawdą nie zależy tylko na upatrzonej Tożsamości (*identitas*) iednych obrazów z drugimi: i równać iedne rzeczy z drugimi, nic innego nie znaczy tylko uważać które rzeczy w pytaniu są to samo co i drugie, albo jakim sposobem iedne stać się mogą to samo znaczącymi, co i drugie: dostrzeżłszy z warunków pytania tę tożsamość rzeczy, a w nią zagarnawszy rzecz nieznaną, mówimy żeśmy związali rzeczy znane z nieznanymi. Cały zbiór prawd wynalezionych w jakimkolwiek rodzaju, i cały sposób myślenia zagłębiwszy się w jego rostrzaskanie przekonają nas o oczywistości tego tłumaczenia, z któregośmy tu bardzo wiele Logicznych mogli wyciągnąć uwag, gdybyśmy się nie bali przestąpić granic naszego zamiaru. Zrównania Algebraiczne nayoczywiście to pokazują. Jeżeli więc dwa członki zrównania są wyrazem tożsamości między iednymi rzeczami i drugimi zawartymi w pytaniu; ta tożsamość zostanie nienaruszoną, czyniąc iakiekolwiek bądź odmiany, byleby te same odmiany któreśmy czynili w iednym członku zrównania, były czynione i w drugim. Wolno nam więc wprowadzić w zrównanie iakiekolwiek działania potrzebne do oddzielenia rzeczy nieznaney od znanych, bo te działania nie naruszają bynajmniej raz dostrzeżonego związku, byleby to, co się rozrywa lub znosi w iednym członku dla otrzymania ilości nieznaney samotnie, w drugim zaraz członku było zniszczone lub rozerwane. Chcąc więc oswobodzić x od tych wszystkich ilości znanych, z ktorými się miesza; potrzeba nam nasamprzód uwolnić je od dzielnika $20a$; przeto należy obydwie strony mnożyć przez tego dzielnika, i wypadnie $x(20at+20bt'+20ct''-ct'')=20ae$: chcąc potem uwolnić x od mnożnika $20at+20bt'+20ct''-ct''$ dzielić nam potrzeba przez niego obydwie członki, a tak otrzymamy:

$$x = \frac{20ae}{20at+20bt'+20ct''-ct''},$$

gdyby

gdyby jeszcze do tego x przydaną lub odciagnioną była iaką ilość znana, w pierwszym razie przypadłoby nam ją odciągnąć; w drugim zaś razie dodać z obydwóch stron zrównania; czyli co na jedno wyidzie: przeniesćby ją należało na drugą stronę z znakiem przeciwnym. Całą więc sztuką rozwiązania zrównań takiego rodzaju, iaki tu rostrzaliśmy; czyli wyrażenia ilości nieznaney przez funkcją znanych, zależy na używaniu działań przeciwnych tym, które zachodzą z ilościami znanymi znajdującemi się przy ilości nieznaney. Należy więc jest rzeczą przenieść terminy zrównania zamykające ilość nieznaną na jedną stronę znaku równości, wszystkie zaś ilości znane na stronę drugą, odmieniając znak w tym terminie który się przenosi, na przeciwny: potem jeżeli ta ilość nieznaną znajdzie się mnożoną lub dzieloną przez iakie znane, należy w pierwszym przypadku obydwie strony rozdzielić, w drugim zaś należy je rozmnożyć przez tę samą ilość znane; a tak ilość nieznaną oswobodzoną od wszelkiego składu, wyrazi się przez samą ilość znane, i pytanie rozwiązane zostanie. Wartość takową ilości nieznaney wyrażoną przez samą ilość znane nazywamy się **PIERWIASTKIEM ZRÓWNANIA** (*Radix Aequationis*). Jeżeli pytanie nasze nie ma więcej iak jedną odpowiedź, Zrównanie one zawierające nie da tylko jeden pierwiastek i nazywamy się **PIERWSZEGO STOPNIA**. Funkcye zaś takowe w które wprowadzony związek nie wiedzie tylko do jednej odpowiedzi, nazywać odtąd będziemy **IEDNO-KSZTAŁTNE** (*Uniformes*).

§. V.

Z reguły dopiero wyłożonéy wnosi się oczywiście: **Náprzód**: Ze jeżeli zrównanie iakie znajdzie się mnożoném lub rozdzieloném we wszystkich terminach przez iaką ilość lub funkcją, ta ilość lub funkcya nie należy do zrównania: mając ją bowiem nie naruszamy bynajmniej związku między warunkami pytania, tak iako podane iakie zrównanie mnożąc lub

Z poprzedzających uwag wyciąga się prawdziwe ogólne na rozwiązanie zrównań 1go stopnia.

Wypadki z reguły poprzedzających.

lub dzieląc całe, przez iakakolwiek funkcy; lub dodając do siebie kilka równań tego samego pytania wypadających tenże związek zupełnie ocalamy. *Powtórę*: Ze. Równanie iakichkolwiek, przeniosłszy w niem wszystkie terminy na jedną stronę znaku równości byddź może przywiedzionem do zero, to jest do wyrazu $A=0$, gdzie A jest funkcyą iakichkolwiek ilości w Równanie wchodzących. Takowego wyrazu równań wprowadzonego od *Hariota* będziemy zawsze używać w głębszych naszych dociekaniach. Równanie więc pierwszego stopnia, w którym nie zachodzi tylko jedna nieznaną, wyrazić się może nayogólniej przez $x+B=0$ gdzie B jest funkcyą samych ilości znanych, iego zaś pierwiastek przez $x=-B$. *Potrza-*
cie: Ze każdy pierwiastek Równania podanego wło-

§. VI.

Chcąc teraz wypalki Arytmetyczne z Algebraicznemi mi porównać, wróćmy się do Równania rozwiązane-

Równania się
wypadki Aryt-
metyczne z Al-
gebraicznemi
dla objaśnienia
i potwierdze-
nia tego co się
w §. I. mówi-
ło.

Wyrażając podziały zysku podług §. 2. przypada:

na Pierwszego Kupca $xt = \frac{20ae}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$

na Drugiego $\frac{xbt'}{a} = \frac{20bt'}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$

na Trzeciego $\frac{xct''}{a} = \frac{20ct''}{20at+20bt'+20ct''-ct''}$

te trzy Równania stawiają nam przed oczy działani-
nia Arytmetyczne przywiązane do natury naszego py-
tania

tanią, a zatem pokazują reguły, za którymi iść mamy, chcąc w liczbach wynaleźć to, cośmy sobie zadali. Wiedząc bowiem znaczenia liter, ich układ odpowiadający pewnym działaniom, czytać możemy w naszych Zrównaniach te wszystkie reguły, któreby Arytmetyka mogła podać w takowym przypadku: a wykonując je, znajdziemy w szczególności każdy podział w liczbach, których summa równa jest 90.000 czyli s , jeżeli za a, b, c, t, t', t'' , te włożymy wartości któreśmy sobie w §. I. przybrali, to jest, $a=20.000$ $b=18.000$, $c=12.000$, $t=9$, $t'=12$, $t''=15$. Znajdziemy że przy tych wszystkich warunkach

na pierwszego Kupca przypada $28,371\frac{486}{1134}$

na drugiego $34,285\frac{810}{1134}$

na trzeciego $27,142\frac{972}{1134}$

Umorzywszy taki warunek w naszym pytaniu, zaraz w Zrównaniu niknie termin odpowiadający temu warunkowi, który opuściwszy mamy zaraz rozwiązanie pytania tym warunkiem zmniejszonego: i tak n.p. gdybyśmy chcieli zniszczyć tę stratę którą ostatecznie Kupcowi przypada ponieść, nie potrzeba nam tylko w podziale trzeciego Kupca opuścić $\frac{xc''}{20a}$,

tem w mianowniku wszystkich zrównań — ct'' , terminy obydwa temu warunkowi należyte: a wypadnie:

$$xt = \frac{at+bt'+ct''}{a}$$

$$\frac{xbt'}{a} = \frac{bet'}{at+bt'+ct''}$$

$$\frac{xcct''}{a} = \frac{cet''}{at+bt'+ct''}$$

te

Z Zrównań
wyciąga się re-
gula Arytme-
tyczna towa-
rzytwa.

te Zrównania wyrażają nam bardzo iasnie *regulę Towarzystwa*; to jest, że zysk przywiązany do nierównych sum i czasów każdego Kupca, otrzymuje się mnożąc masę ogólną zysku przez czas i sumę, każdego zakładową, a mnogość dzieląc przez sumę trzech mnogości z każdego w szczególności zakładu przez odpowiadający mu czas. Jeżeli jeszcze nawet zakłady położymy w równym czasie, będzie $t=t'=t''=1$, otrzymamy:

$$x = \frac{ae}{a+b+c}, \quad \frac{xb}{a} = \frac{be}{a+b+c}, \quad \frac{xc}{a} = \frac{ce}{a+b+c},$$

Opisanie *Analysy* podług niektórych Geometrów: jest różnicą od Algebry.

i pytanie nasze przywiedzione do najpierwszego stanu, odkrywając nam w Zrównaniach tę regulę, za którą idąc wyśledziliśmy podziały zaraz na początku rozdziału wymienione. Te wszystkie korzyści tracemy działając w liczbach, dla przyczyn już wyłożonych, których prawdę ostatnie te Algebraiczne wypadki dają nam iak náyoczywściej uczuwać, a w nich poznać te nieprzyzwoitości, które pokazawszy się pierwszym wynalazcom wciągly ich w potrzebę użycia znaków ogólnych. Widzieliśmy jeszcze, że Zrównania ogólnie rozwiązane stawiają umysłowi zbiór wielu prawd i twierdzeń w nich zawarty. Wydobywanie takowych prawd z ostatnich wypadków Algebraicznych, potrzebuje rozbierania tego składu myśli na inne prościęysze i na różne przypadki szczególne razém w Zrównaniu ogarnione, co nazywają niektórzy Geometrowie *Analysis*, różniąc ją tém od Algebry, że ta ostatnia poddając nam tylko znaki i działania do gatunku pytań przywiązane, zależy jedynie na prowadzeniu nas do Zrównania wyrażającego wartość rzeczy nieznaney przez znane; po czém dopiero następnie *Analysis* zatrudniającą umysł rozbieraniem Zrównań na różne prawdy w nich zawarte, y wyciąganiem ogólnych prawideł służyć nam mających zawsze na rozwiązanie wszystkich iakichkolwiek

kolwiek pytań związanych z tém, które nás do tych wypadków przywiodło. Zatrzymamy się ieszcze z naszym zdaniem nad tą różnicą; bo sobie zachowujemy inną porę wytłómaczenia obszerniey w tym punkcie naszego sposobu myślenia.

§. VII.

Pytanie dopiero rozwiązane służyć nám może za wzór do innych iakichkolwiek podobnego rodzaju, to jest: gdzie nie zachodzi do wynalezienia tylko jedna rzecz nieznaną. Ale iakże sobie postąpić mając wiele na raz rzeczy nieznanych w pytaniu? Pewni jesteśmy, że rzeczy nieznané w pytaniu nie wynaydują się inaczej, tylko za pomocą dostrzeżonego ich związku z rzeczami znanemi; że ieden dostrzeżony związek nie może nám odkryć tylko iedną rzecz nieznaną: więc mając wiele na raz rzeczy nieznanych do wynalezienia, potrzeba nám tyle związków rzeczy nieznanych z znanemi, ile zachodzi niewiadomych rzeczy w pytaniu. Potrzeba ieszcze aby każdy stych związków był różny od innych: bo jeżeli rzeczy nieznané są prawdziwie różne, każda z nich zawisła od innego stosunku z rzeczami znanemi: inaczej, pytanie nasze nie mając tylko na pozór wiele nieznanych rzeczy, które zależą od wynalazku iedney, należałoby do rodzaju pytań rostrzających w §§. poprzedzających. Idzie więc za tém, że mając wiele do wynalezienia rzeczy, potrzeba nám mieć tyle Zrównań ile zachodzi niewiadomych ilości w pytaniu, z których każde służyć nám má do wyciągnięcia wartości iedney nieznaney. Gdyby każde z takowych Zrównań nie zawierało w sobie tylko iedną niewiadomą ilość złączoną z wiadomemi; rozwiązawszy ie po iednemu podług reguły wyżey podaney, odkrylibyśmy zaraz to wszystko cośmy sobie zadali. Ale ktokolwiek z nás pilnie uważał drogi wynalazku w pierwszym pytaniu, powiniénby teraz uczuć, że dostrzeżenie takowych związków każdej rzeczy nieznaney z fanemi tylko znanemi, potrzebowałoby ostatniego wyfilenia

C

naszych

Początki prowadzące do rozwiązania pytań wielo-
znanych rzeczy zamykających.

naszych myśli, i byłoby bardzo małej liczbie różnóm dostępne. Smiem nawet trzymać że w przypadku znacznej liczby rzeczy nieznanych, byłoby niepodobne, ponieważby ciągnęło za sobą wielką mnogość bardzo zawikłanych kombinacji w jednym prawie momencie, co przechodzi granicę najdzielniejszy dufcy. Wspomógamy przeto unyś nasz w takich dociekaniach prostym uważaniem związków między ilościami jakimikolwiek. Wiemy że te wyciągaia się z warunków pytania: w tych zaś warunkach tak rzeczy pokazują się zwikłane, iż jedna nieznaną wiąże się z drugą, zaczęm zrównania stąd wypadające będą takowe, że każde z nich zawierać może wszystkie ilości nieznané różnym sposobem związane z znanymi. Obiaśnimy to przykładem.

„Jedna bryta zmieszanego kruszeu z złota i srebra
 „ma w sobie objętości (*Volumen*) dwanaście caliów
 „kubicznych, waży zaś sto uncyi. Pytam się wieleż
 „pod tą objętością i wagą zamyka złota, a wiele srebra?
 „wiedząc że jeden cal kub. złota waży $12\frac{2}{3}$
 „uncyi, jeden zaś cal kub. srebra waży $\frac{8}{9}$ uncyi?”

W tém zadaniu mamy dwie nieznané rzeczy od siebie różne, ilość złota, i ilość srebra wchodząca w skład masy zmieszanej: potrzeba nam więc dwóch związków, a z nich tyleż zrównań. W każdej z dwóch ilości nieznanych zachodzi uważać objętość i wagę: ponieważ zaś wiemy ciężar jednego calu każdego kruszeu, zostaje nam do wyhalezenia sama ich objętość w calach, którą mnożąc przez ciężar jednego calu każdemu kruszeowi właściwy, wynaydziemy wagę. Nazwiemy więc objętość złota wchodzącego w brytę zmieszaną, x ; objętość srebra y ; a rozważywszy dobrze zadanie, wypadną nam dwa związki między temi ilościami, z których jeden należyć będzie do objętości, a drugi do ciężaru. Nasamprzód podług warunków

warunków pytania sumama dwóch objętości kruszcowych bydz powinna równa 12: skąd wypada pier-
wsze. Zrównanie - - - $x+y=12$. Powtóre: dwie te
objętości ważyć powinny sto uncyi, aże ieden cał
złota waży 12, $\frac{2}{3}$ uncyi, więc x całów waży 12, $\frac{2}{3}x$

czyli $\frac{38}{3}x$, podobnym sposobem wypada że y cał-

ków srebra waży 6, $\frac{8}{9}y$ uncyi, czyli $\frac{62}{9}y$, iedeki ie-

den cał waży 6, $\frac{8}{9}$ czyli $\frac{62}{9}$, skąd wynika drugie

Zrównanie: $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100$,

Mamy teraz dwa Zrównania $x+y=12$, $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100$, z których każde zamyka obydwie niezna-
ne ilości. Dofyć nam jest wniysdz w lekkie ros-
trząśnienie naszych myśli aby się przekonać, że póty
żadne stych Zrównań nie odkryje nam wartości ia-
kieykolwiek nieznaney, poki w niem druga nieznaną
ilość oznaczoną nie będzie. Dla czegoż tyle zaga-
dnień nie tylko w naukach moralnych i Fizycznych,
ale nawet w sprawach życia potocznych zostaić nie-
rozwiązanych, chociaź znamy wystarczającą liczbę
związków do ich odkrycia? oto dla tego, że te zaga-
dnienia wiążą się z innemi rzeczami nieznanemi do
którychśmy ieszcze oddzielenia lub oznaczenia nie
przyzłhi. Dáymy teraz że reflexya ciągłym zastano-
wieniem się i kombinacyą dała nam téy nieznaney
rzeczy, od której zagadnienie zależy, wydobydz zna-
czenie w innych związkach utopione, i wyrazić ie
przez same rzeczy znane; na ten czas na miejsce téy
nieznaney rzeczy kładziemy iey naturę odkrytą i za-
gadnienie

gadnienie nasze ułatwiamy. Cóż to znaczą te wszystkie drogi myślenia uważając je geometrycznie? oto nie mogąc rozwiązać zagadnienia mieliśmy rzeczy nieznaną zwikłaną we wszystkich związkach: przenosząc atoli wartość jednej rzeczy nieznaną z jednego Zrównania do drugiego przerabiamy każde z nich na związek między jedną tylko nieznaną i rzeczami znanymi, a tym sposobem nasze dociekania przyprowadzamy do tego stanu, w jakim było Zrównanie nasze wyżej rozwiązane. Tak to samą drogą idź nam należy chcąc z dwóch Zrównań $x+y=12$ - - -

$\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100$, odkryć to, czego szukamy, to jest: potrzeba nam wartość jednej nieznaną ilości wyciągnąć z jednego Zrównania i włożyć ją w drugie: i tak mamy $x=12-y$, włożywszy za x , $12-y$ w drugie Zrównanie; wypadnie $\frac{38}{3}(12-y) + \frac{62}{9}y = 100$,

czyli mnożąc ułamki 3. $38(12-y) + 62y = 900$ - - -
 $1368 - 114y + 62y = 900$: Zrównanie nie zamykające tylko jedną nieznaną y , które rozwiązawszy podług §. 4. wynajdziemy $y = \frac{468}{52} = 9$, więc $x = 12 - 9 = 3$.

Przeto w bryle mieszanej zamyka się 9. ciałów kubicznych srebra, a 3 ciał złota.

Przyszliśmy do wypadków barzo szczególnych dla tego żeśmy użyli liczb. Rozwiążmy jeszcze to samo zadanie ogólniejszym sposobem, nazwawszy Objętość całej masy a ; ciężar jednego ciału kubicznego cięższego kruszcu b ; drugiego lżejszego c ; ciężar całej masy d : będzie $x+y=a$ - - $bx+cy=d$, działając tym samym sposobem co i przedtem znajdziemy - - -
 $y = \frac{a-ba}{c-b}$; $x = \frac{ca-d}{c-b}$. Te dwa Zrównania swą

ogólnością przywiodły nas do reguły powszechny na wszystkie podobnego rodzaju pytania. Chcąc ją wyciągnąć

ciągnąć zrozumimy wprzód znaczenie terminów: ponieważ c znaczy ciężar iednego calu kub.; a zaś znaczy objętość całej masy, więc ca znaczy ciężar całej masy zrobionej z samego lekkiego kruszcu: $b-c$ znaczy różnicę ciężkości gatunkowych dwóch kruszców zmieszanych. Dwa więc Zrównania wyrażają następującą regułę.

„Chcąc doysdź objętości kruszcu cięższego, rachuy ciężar bryły iak gdyby była zrobiona z samego kruszcu lekkiego, odciągnij ten ciężar od ciężaru masy zmieszanej, i resztę s tąd wynikającą rozdziel przez różnicę dwóch ciężkości gatunkowych. Wieloraz podziatu da objętność kruszcu cięższego.

„Chcąc zaś wynaleśdź objętość kruszcu podléyszego: szukay ciężaru masy, iak gdyby była zrobiona z samego cięższego kruszcu, od tego odciągnij ciężar masy zmieszanej, a resztę rozdzielwizy przez różnicę dwóch ciężkości gatunkowych wypadnie objętość lekkiego kruszcu.

Ta reguła nazywá się w Arytmetyce REGUŁĄ MIESZANIA (*Regula Alligationis*), za pomocą której wiele innego rodzaju pytań może się rozwiązać: n.p. to:

„Iedna stopa kubiczna wody morskiej wáży 74 funty; stopa zaś wody deszczowej wáży 70 funtów: pytam się wieleby potrzeba zmieszać wody morskiej i deszczowej ażeby iedna stopa téj mieszanki wáżyła 73 funty,,. Rozwiązanie tego pytania łatwo się bardzo wyciąga z naszych Zrównań uczyniwszy $a=1$, $b=74$, $c=70$, $d=73$ wypadnie ilość wody morskiej $x=\frac{3}{4}$; ilość wody deszczowej $y=\frac{1}{4}$.

Uwagi które nás przywiodły do rozwiązania Zrównań 1go stopnia zamykających wiele ilości nieznanych kończą się na tém, ażeby mając kilka Zrównań między ilościami nieznanemi x, y, z , i t. d. przerobić je na innych tyleż, z którychby każde zamykało w sobie iedną tylko niewiadomą. Spółób którego tu

C3

użyjemy

użyjemy, wypada z pierwszego wniosku §. 5. Niech będą dwa Zrównania: $-ax+by+c=0$ $-a'x+b'y+c'=0$, chcąc wyrzucić x , mnożę całe Zrównanie pierwsze przez współ-czynnik x w drugim, to jest przez a' ; potem mnożę Zrównanie drugie przez a to jest przez współ-czynnik x w pierwszym; a tak terminy zawierające x w obydwóch Zrównaniach przywiodłszy do tegoż samego wyrazu, jeżeli mają jedne znaki odciągám jedno. Zrównanie od drugiego; jeżeli zaś miałyby znaki przeciwne, dodaję je razem; przez co otrzymam nowe Zrównanie bez x ; to jest wykonywając to wszystko:

$$aa'x+ba'y+a'c=0 \quad aa'x+b'ay+ac'=0$$

$$(a'b-ab')y+a'c-ac'=0 \quad y = \frac{a'c-ac'}{a'b-ab'}$$

Chcąc wyrzucić y aby otrzymać wartość na x ; mnożę pierwsze Zrównanie przez b' , drugie przez b ; a odciągawszy tamto od tego otrzymam Zrównanie w którym nie będzie y .

$$ab'x+b'b'y+b'c=0 \quad a'bx+bb'y+bc'=0$$

$$(a'b-ab')x+bc'-b'c=0 \quad x = \frac{b'c-bc'}{a'b-ab'}$$

Niech będą trzy Zrównania:

$$(A) \quad ax+by+cz+d=0 \quad (B) \quad a'x+b'y+c'z+d'=0$$

$$(C) \quad a''x+b''y+c''z+d''=0$$

działając sposobem dopiero, wyłożonym, kombinuję ich dwa na raz; i tak kombinując (A) z (B), aby wyrzucić y , przyjdę do Zrównania:

$$(ab'-a'b)x+(b'c-bc')z+b'd-bd'=0 \quad (D)$$

kombinując potem (A) z (C) tymże samym końcem, otrzymam:

$$(ab''-a'b'')x+(b'c''-b''c')z+b'd-b'd'=0 \quad (D')$$

Powtórę kombinując (A) z (B) aby wyrzucić z , wypadnie mi:

$$(ac'-a'c)x+(bc''-b''c)y+dc'-d''c=0 \quad (E)$$

Kombinuję znowu (A) z (C) na ten sam koniec i przyjdę do

$$(ac''-a''c)$$

$(ac'' - a''c)x + (bc'' - b''c)y + dc'' - d''c = 0 \dots (E').$
 Tą samą sztuką kombinuję (D) z (D') abym z nich wyrzucił x , i otrzymałwszy równanie na samo x , wyciągnę z niego tę wartość:

$$(ab' - a'b)(b''d - bd'') - (b'd - bd')(cb'' - bc'')$$

$$x = \frac{(ab' - a'b)(cb'' - bc'') - (b'd - bd')(cb'' - bc'')}{(ab' - a'b)(cb'' - bc'') - (b'd - bd')(cb'' - bc'')}$$

Z tychże samych równań wyrzuciwszy x , otrzymam na następującą wartość:

$$(b'd - bd')(ab'' - a''b) - (b''d - bd'')(ab' - a'b).$$

$$y = \frac{(ab' - a'b)(cb'' - bc'') - (b'd - bd')(cb'' - bc'')}{(ab' - a'b)(cb'' - bc'') - (b'd - bd')(cb'' - bc'')}$$

Na koniec kombinując (E) z (E') wyrzucam y , i wypadnie mi równanie na y :

$$(dc'' - d''c)(ac'' - a''c) - (dc'' - d''c)(ac' - a'c).$$

$$y = \frac{(ac' - a'c)(bc'' - b''c) - (bc' - b''c)(ac'' - a''c)}{(ac' - a'c)(bc'' - b''c) - (bc' - b''c)(ac'' - a''c)}$$

Tymże samym sposobem, to jest przez kombinacją dwóch naraz Równań, postępując sobie z większą ich liczbą potrafimy je przerobić na inne nie zamykające tylko jedną ilość nieznaną. Z tych przykładów widzimy oczywiście, jak ostatecznie wypadkowe Równania znacznie są zawikłane; to zawikłanie tem się barziéj pomnaża, im z większą liczbą Równań mamy do czynienia. Będziemy mieli sposobność wyłożenia na innym miejscu tych wszystkich nieprzyzwoitości, które są przywiązane do niedoskonałości sposobów w tym punkcie nam służących.

§. VIII.

Tużesmy się z nąypewniejszych początków myślenia i z natury Równań zupełnie przekonali, że chcąc pytanie iakie zawierające kilka nieznanych rzeczy dostatecznie rozwiązać i wynaleśdź wartość każdej z osobna, potrzeba nam tyle Równań ile rzeczy nie wiadomych. Trafiła się atoli często, że pytanie iakie więcéj zawiera rzeczy nieznanych niżeli w niem upatrzeć można związków różnych: na ten czas nie mając wystarczających liczby Równań na przeróbenie ich iakie, ażeby każde z nich zamykało jedną tylko

Tłómaczy się flán poznawania, kiedy w pytaniu mniej zachodzi związków niżeli rzeczy nieznanich: s kad się wyciąga natura pytań niezaczonych,

nieznana, wszystkie sposoby na rozwiązanie pytania stają się póty bezskuteczne, poki nie dopełniemy związków brakujących. Opuszczony w tym razie umysł od sposobów do ogólnego rozwiązania potrzebnych, ucieka się do pewnych szczególnych wartości, które podług upodobania tylu ilościom nieznanym nadaie, ile mu Zrównań brakuie. Takowe partykularne przypuszczenia są nowemi warunkami wprowadzonemi w pytanie, i razem nowemi związkami arbitralnemi zastępującemi miejsce koniecznych. Aże te szczególne wartości zawisły od upodobania, iako to rościagnąć się może bez końca do iakichkolwiek wartości; tak liczba odpowiedzi na takowe pytanie bydz może nieskończona. Przechodząc bowiem wolą naszą następnie po wszystkich szczególnych przypadkach, na każdy znaydziemy inną odpowiedź przywiązaną do każdej z osobna wprowadzonej wartości. I s tych ci to przyczyna takowe pytania mają imię NIEOZNACZONYCH (*Problemata indeterminata*). Ieden nayprościejszy przykład wystarczy nam do objaśnienia tego cośmy dopiero mówili:

„Wynaleśdź dwie liczby których summa byłaby „równą 36.” Nazwawszy obie te liczby nieznané x , y , mamy z warunku pytania to tylko jedno Zrównanie:

$x+y=36$. . . $x=36-y$. W tym przykładzie wi-
dziemy oczywiście że póty nie odkryjemy znaczenia x ; póki drugiey ilości nieznanéy y , nie nadamy pewnéy wartości: kładąc więc za y iakie nam się tylko podoba liczby, każdej z nich będzie odpowiadać in-
fza wartość na x ; i tak biorąc

za y 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t.d.
Odpowiadá wartość na x 35, 34, 33, 32, 31, 30, i t.d.
a iako iśdź możemy po wszystkich liczbach iakich-
kolwiek w y ; tak pafmó odpowiedzi na naszą pyta-
nie ciągnąć się może bez końca. Każdą s tych wár-
tości nic innego nie iest tylko nowe Zrównanie, kto-
ré w niedostatku na rozwiązanie pytania dostarczą-
my.

my. Przeniosłszy uwagę naszą z Geometrii do innych nauk i spraw życia, znajdziemy w nich niezmierną liczbę takowego rodzaju pytań. Z każde powstało tyle różnych przypuszczeń do tłumaczenia wielu skutków natury, któremi romanśowe głowy zapełniły Fizykę? skądże tyle rozmaitych domysłów i systematycznych przyczyn, któremi w tylu naukach i sprawach czyniemy paradę z naszej niewiedomości? Wszystkie te pytania są względem nas nieoznaczone, w których rozumowi brakuje dostatecznej liczby związków do ich ułatwienia. Zastępując imaginacya ten niedostatek rzeczy znanych i warunków, poddaie różne przypuszczenia rozumowi; z których on wyciąga skutki rzetelne albo urojone, zgodne lub opaczne swym początkom podług prawdy lub fałszywej kombinacyi. A iako kraina domysłu jest niezmierzona, tak liczba tłumaczeń bydl musi bez granic: a rozum ludzki poty się błąka i gubi w niepewności poki dostrzeżone prawdziwe związki nie dopełnią jego potrzeb, i nie postawią go w stanie odkrycia prawdy, którą dzieła imaginacyi i domysłu obalą.

§. IX.

Kiedy w innym rodzaju poznawania niedostatek z natury py-
związków w zadaniach nieoznaczonych stał się źródłem nieoznaczo-
dłom tylu błędów; duch geometryczny szczęśliwszy nych wyciąga
zawsze w dociekaniu i użyciu prawdy, odkrył w nim się barzo ogół-
źródło niezliczonych i nieprzepartych wynalazków. ny początek
Zatrudniłmy się nayiaśnieyszem tego początku wy- niezmiernie ro-
łożeniem: zległemu w ca-
łey Matematy-
ce użyciu.

Ponieważ mając więcej ilości nieznanych niżeli
zrównań, mamy wolność wprowadzenia w pytanie
nasze tyle warunków i przypuszczeń, ile nam zwiaz-
ków brakuje; te zaś wszystkie nowe przypuszczenia
zawisły od upodobania naszego; więc w szukaniu
iakiękolwiek prawdy, możemy wprowadzić spó-
soby iakie nam się tylko podobą, bylebyśmy py-
tanie nasze przerobili na nieoznaczone przez wpro-
wadzenie

wadzenie w nie więcej ilości nieznanach. Tę bowiem zostawiając nam wolność zakładania iakichkolwiek kondycyi, daia nam prawo czynienia takich przypuszczeń, które pytanie nasze przywiążą do takich sposobów rozwiązania, iakiśmy sobie obrali. Owiżem możemy nawet za pomocą nowych nieznanach ilości, zaraz takowe kondycye wprowadzić, które nam natychmiast pytanie nasze rozwiążą. A iako bez naruszenia natury rzeczy możemy w Zrównaniach iakiekoľwiek wciągnąć więcej nieznanach rzeczy, tak w pytanie nasze możemy wprowadzić drogi wynalazku, iakie nam się tylko pokażą nayprościejšie, lub założyć kondycye odkrywające nam natychmiast to, cośmy sobie zadali. Ten początek dobrze obięty umyśłem iest ieden z nayogólniejszych i z nayobfitszych podbiiający nam w iakiemkolwiek badaniu sposoby z natury swoiey proste a często bez tēy pomocy w wielu pytaniach nieużyte, i że tak rzekę uporne. Używanie tego początku iest niezmiernie po wfysłkich Matematyki i Fizyki częściach lubo pod rozmaia postaćią i odmianą. My sami użyjemy go w ciągu te-
raźniejszey nauki; abyśmy zaś tēm barziej oświecili się o sposobie postąpienia sobie z nim, przystofoymy go teraz do teoryi Eliminacyi, ktorąśmy wyżej po-
stług innych sposobów odbyli.

Niech będą dane dwa zrównania:

$$(A) \dots ax+by+c=0 \dots (B) \dots a'x+b'y+c'=0$$

chcąc ie przerobić na inne dwa, z którychby iedno zawierało samo x , drugie zaś samo y ; biorę trzecią nieznaną ilość m , i przez nią rozmnożywszy pierwsze zrównanie, dodaię ie do drugiego, s czego wypada:

$$(C) \dots (ma+a')x+(mb+b')y+mc+c'=0$$

ponieważ do rozwiązania mego pytania założoną iest kondycyą, aby n.p. z zrównania (C) wypadło x ; maiąc iuż prawo wprowadzenia iey, czynię $ma+a'=0$ (D), i zostaię mi się $\dots (mb+b')y+mc+c'=0 \dots$

$$y = - \frac{mc+c'}{mb+b'}$$

Zro-

Zrównanie (D) nazywa się ZRÓWNANIEM WARUNKOWYM (*Aequatio Conditionalis*) służące na oznaczenie nowęj nieznanęj ilości m . Iakóż z (D) wyciągám $m = \frac{a'}{a}$, a włożywszy tę wartość za m w y ,

$$\text{wypadá } y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Chcąc zaś z Zrównania (C) wyrzucić y , czynię $mb + b' = 0$ i zostaje mi się $(ma + a')x + mc + c' = 0$

$$x = \frac{mc + c'}{ma + a'}; \text{ włożywszy w } x \text{ za } m = \frac{b'}{b} \text{ jego wartość: otrzymám, } x = \frac{bc' - b'c}{b'a - ba'}.$$

Mając trzy Zrównania:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0.$$

ponieważ z każdego przychodzi wyrzucić dwie ilości nieznanę, potrzeba wprowadzić dwie nowe nieznanę, któreby mi dały prawo uczynienia dwóch warunków potrzebnych: mnożę więc pierwsze przez n , drugie przez n' , i dodaję wszystkie trzy razem; skąd powstaie:

$$(ma + na' + a'')x + (nb + nb' + b'')y + (nc + nc' + c'')z + md + nd' + d'' = 0.$$

chcąc teraz wyrzucić y, z , razem, czynię:

$$\left. \begin{aligned} mb + nb' + b'' &= 0 \\ mc + nc' + c'' &= 0 \end{aligned} \right\} (D),$$

$$\text{zostaje się } x = \frac{md + nd' + d''}{ma + na' + a''}, \quad \text{Dwa Zrównania}$$

warunkowe (D) służą mi do wynalezienia m, n , które rozwiązuąc podług przykładu pierwszego, mnożę pierwsze z nich przez p , i dodawszy je razem, otrzymám $(pb + c)m + (pb' + c')n + pb'' + c'' = 0$

chcąc wyrzucić z niego n , czynię $pb' + c' = 0$

$$p = \frac{c'}{b'}, \text{ zostaje mi się } m = \frac{pb'' + c''}{pb + c} = \frac{c''b' - c'b''}{b'a' - b'a''}.$$

chcąc zaś wyrzucić m , wypada: $pb+c=a - p=\frac{c}{b}$

$$n=\frac{pb''+c''}{pb'+c'} \text{ a włożywszy za } p \text{ jego wartość } =\frac{c'}{b},$$

$$n=\frac{cb''-c'b}{bc'-b'e} \text{ te dwie wartości za } m, n, \text{ włożywszy}$$

w zrównanie na x , wypada:

$$x=\frac{c''b'd-c'b'd+cb''d'-c''bd'+c'bd''-b'cd''}{c''b'a-ac'b''+a'cb''-a'bc''+a''bc'+a''cb'}$$

tymże samym sposobem postępując znajdziemy:

$$y=\frac{ad'c''-a'dc''+a''dc'-ad''c'+a'cd''-a''cd'}{ab'e''+ab''c'+a'cb''-a'bc''+a''bc'+a''cb'}$$

$$z=\frac{ab'd''-a'bd''+a''bd'-ab''d'+a'b'd-a''b'd}{ab'e''-ab''c'+a'cb''-a'bc''-a''bc'+a''cb'}$$

Té trzy Zrównania rostrząśnione co do układu ilości w nie wchodzących, tak iako dwa w pierwszym przykładzie, pokaza nam reguły służyć mogące do rozwiązania iakichkolwiek dwóch lub trzech zrównań między tyleż niewiadomemi ilościami. Wziysztkie iak widziemy ilości nieznane mają w swoich wyrazach tegoż samego mianownika, i iednostayność ta pokazałaby nam się w więkšej liczbie Zrównań tym sposobem rozwiązanych. Stofuiąc teraznięysze trzy Zrównania s temi któreśmy w §. 7. s tychże samych związków przez mnożenie i kombinacyą dwóch naraz wyciągneli byli, widzemy, że tamté są zawikłęysze, i zamykaiące więcey mnożników iak té. S kad się oczywiście pokazuje, że Zrównania na końcu §. 7. mają w sobie pewnego mnożnika spólnego licznikowi i mianownikowi, przez którego rozdzielone wzięłyby taki wyraz iak teraznięysze. A iako tego mnożnika spólnego nie iest tak łatwo dostrzec, tak gdybyśmy mieli do czynienia z większą liczbą Zrównań, sposób §. 7. przyprowadziłby nas do barzo zawikłanych ostatnich wypadków, któreby także zawieraiły iakowych mnożników zbytnich i nie należących bynajmniey

najmnięj do naszego pytania. Tę nieprzyzwoitość wiele innych za sobą ciągnącą dostrzegli Geometrowie, i pracowali nad wynalezieniem takowej teoryi Eliminacyi, któraby ich w ostatecznych Zrównaniach przywiodła do wypadków nie barzięj zawikłanych iak natura rzeczy wyciąga. Wszystkie ich usiłowania w tym punkcie nie były dotąd barzo pomyślne: najszczęśliwiej atoli w nich postąpił J. P. Bezout Akademik Paryzki w świeżem swoim dziele (a). Będziemy mieli okazywać w wyższych częściach Matematyki rostrząsać tego Autora teoryę, i poznać iak wiele ieszcze do ięj doskonałości brakuie. Od tych nieprzyzwoitości ten nawet sposób, któregośmy dopiero użyli, nie jest wyięty; że atoli w małej liczbie Zrównań nie pokazują się zaraz, powinniśmy go przemieścić nad pierwszy. Stosując go do liczby iakiejkolwiek n Zrównań, potrzeba nam przybrać $n-1$ ilości nieoznaczonych, przez które mnożąc tyleż Zrównań dodamy je wszystkie z sobą; a chcąc wyrzucić $n-1$ ilości nieznanych, uczyniemy tyleż współczynników zero, co nam da $n-1$ Zrównań warunkowych służących na oznaczenie tyleż nowo wprowadzonych niewiadomych ilości. Chcąc te $n-1$ Zrównań rozwiązać, przybierzemy znowu $n-2$ ilości nieznanych, przez które rozmnożywszy tyleż warunkowych Zrównań i dodawszy wszystkie $n-1$ z sobą, wyciągniemy tym co i przedtem sposobem $n-2$ innych nowych Zrównań warunkowych. S tych znowu rozmnożywszy $n-3$ przez tyleż nowo wprowadzonych ilości nieznanych, przyjdziemy do tyleż nowych innych warunkowych Zrównań, których liczba za każdym działaniem i kombinacją zmniejsza się jednością, aż naostatek przyszedłszy do dwóch ostatecznych Zrównań, i s temiż podobnie postąpiwszy odkryjemy, wartości $n-1$ ilości nieznanych, któreśmy wprowadzili. Na każdą zaś ilość nieznana w Zrównania podane wchodzącą też same działania powtarzając przyjdziemy do

(*) Théorie générale des Equations Algébriques. à Paris 1779.

do wyrażenia każdej w szczególności nieznanej przez funkcyę znanych, na czem rozwiązanie Zrównania zależy. Łatwo nam barzo przekonać się z wyższych wiadomości, że wszystkie Zrównania pierwszego stopnia, w których wiele nieznanych ilości zachodzi, wystawić możemy w tém ogólném:

$$ax+by+cz+du+\dots+k=0.$$

§. X.

Nie zaszkodzi nam tu powtórzyć to, cośmy już wyżej namiénili, że mając do rozwiązania iakowégo pytania tyle Zrównań ile nieznanych ilości, potrzeba koniecznie, aby każde s tych Zrównań wyrażało inny związek; potrzeba więc aby jedno Zrównanie nie było funkcyą drugiego; inaczej, wypadki nasze nic nie będą znaczyć; i tak n.p. gdyby pytanie iakie przywiodło nas do takich dwóch Zrównań: $6x+2y-16=0$ i $3x+y-8=0$; wynaydziemy

$$\frac{16-2y}{6} = \frac{16-2y}{6} \text{ Zrównanie, które zamykając z oby-}$$

dwóch stron téż samé ilości i terminy, nic nas nie uczy i nazywa się Tosame (*Aequatio identica*): przy-
szliśmy zaś do takiego Zrównania dla tego, że z dwóch początkowych Zrównań drugie nic innego nie jest, tylko pierwsze rozdzielone przez 2, co nowego związku nie wyraża; i takowe przypadki lubo się здаją na pozór zamykać tyle Zrównań ile potrzeba, należą atoli w rzeczy samej do klasy pytań nie-
oznaczonych. Utkwiłmy to sobie teraz w pamięci, że Zrównania tosame nie wyrażają żadnego związku między ilościami, że ich związek cały na tém zależy, iż każdy termin jednego członka jest ze wszystkiém równy terminowi podobnému drugiego. Powtóre: że wszystkie Zrównania wyrażają tosamą, bo wyrażają związek podług §. 3. ale przez to nie wszystkie Zrównania są tosamemi, ale tylko te, które wyrażają tosamą cę do stófunku i cę do terminów. Przytrafić się iefzcze może, że związek w jednym Zrównaniu będzie

będzie przeciwny związkowi drugiego, i tak n. p. gdybysmy przez jakie pytanie przyszli do takich dwóch Zrównań $y+12x-42=0$ $- 2y+24x-32=0$ rozwiązawszy je znajdziemy $42=16$: ta nieprzyzwoitość ostrzega nas o przeciwnościach które się wmieściły w warunkach naszego pytania, a zatem o niepodobieństwie wyciągnięcia z niego prawdy.

Rozstrząsnęliśmy dwa przypadki Zrównań pierwszego stopnia, pierwszy: kiedy tyle wypadá związków ile ilości nieznaných; drugi: gdy iaká liczba takowych związków brakuje: wystawić sobie jeszcze można trzeci: kiedy liczba Zrównań większa jest od liczby niewiadomych ilości. Takowy zbytek Zrównań ścieśnia tém barżię nasze poznawanie, im jest większy: tak iak niedostatek związków rościągá dalej naszę wolność myślenia aż do krainy imaginacyi i domysłu. Każde bowiem Zrównanie zawiera inżé warunki, którym będąc obowiązani uczynić zadosyć, muszemy jeszcze przypadki pewné dzielić na swoje klasy, i w tych naznaczać excepcye przywiązane do kondycyi w zbytńich Zrównaniach zawarte. Znajdujemy się na ten czas w podobnym stanie owego badacza natury, który dostrzegłszy iakiego prawa między pewnými skutkami ciá, rościagnął ie odważnie do wszystkich okoliczności miejsca i czasu, w którym takowe skutki dziać się mogą: wtém nowa iaka obserwacyá odkryła mu przypadek odstępujący od tego prawa, i dała mu poznać że iego początek podlegá excepcyi do pewnéj odmiany czasu lub miejsca przywiązanej, która ograniczá iego ogólność. Nowa ta obserwacyá nie innego nie jest, tylko nowy zbytńiący związek ścieśniający iego prawo i myślenie. Widziemy przeto że iak niedostatek tak zbytek związków w iednéj rzeczy, jest myśleniu naszemu szkodliwy; iak pierwszy przez ułzczególnianie, tak i drugi przez zbyt śmiałe upowszechnianie myśli bydz może zródłem błędu. Pierwszy káże nám bydz pracowitemi w dochodzeniu prawdy, drugi uczy nás ostrożności

ostrożności w iey stófowaniu; obydwu objaśniaią nas o stanach i drogach naszego rozumu w poznawaniu rzeczy: przekonamy się o tém w dalszym ciągu naszej nauki.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Uwagi nad początkami iuż odkrytemi prowadzą nas do Zrównań wyższych Stopni, do poznania FUNKCYI WIELO-KSZTAŁTNYCH i działań im służyących; z których przychodzemy do rozwiązań ZRÓWNAŃ DRUGIEGO STOPNIA, ich własności, i do nowych początków myślenia wciągających nas w rozleglejsze poznanie Zrównań i Funkcyi.

§ XI.

Nowy rodzaj
Zrównań od-
krywá nám ró-
żné potęgi w
Funkcyach i
działaniá im
właściwe.

Abysmy nic nie odstąpili od łańcucha naszych myśli ciągniemy daley uwagi nad sposobem Eliminacyi, który przerabiaiąc Zrównania między wielu ilościami nieznanemi przywodzi ie do tego rodzaju Zrównań pierwszego stopnia, któryśmy namprzód rostrząsali. Wszystkie Zrównania wiele ilości nieznanych zawierające któreśmy brali za przykłady naszych działań powstawały z funkcyi iednokształtnych i były takiego wzoru: $ax+by+cz+$ i t. d. $+k=0$, gdzie ilość nieznaná była mnożoną przez same tylko ilości znane w każdym terminie. Ale kto przywykł cokolwiek do rozleglejszego poznawania rzeczy, powinien sobie pomyśleć, że pytanie przywieść nas może do takowych Zrównań, w których ilość nieznaná będzie mnożoną przez drugą nieznaną; na ten czas do rozwiązań mieć będziemy Zrównania pod takimi wzorami:

wzorami: $xy+by+a=0$, $xyz+yz+c=0$, $xzy+yz+byx+...+c=0$ i t. d. Dámy n. p. że przyśzedłszy do dwóch takich Zrównań $xy+by=a$ $y=bx+c$ włożemy wartość za y s tego ostatniego w pierwsze; przerobiemy je na $bx^2+(b^2+c)x+bc=a$. Przyśzedłszy do trzech takich $xyz+yz+c=d$, $y=bx+c$, $z=x+d$, a włożywszy za y, z , wartości z dwóch ostatnich w Zrównanie pierwsze; przerobiemy je na $x(bx+c)(x+d)+(bx+c)(x+d)+c=d$, czyli na $bx^3+(c+bd+b)x^2+(cd+c+bd)x+cd+c=d$. Takowym sposobem przyśzliśmy prawdą do Zrównań nie zamykających tylko jedną nieznaną ilość, aleśmy onego nie przywiedli do rodzaju, w którym się znajdowało najpierwsze nasze Zrównanie rozwiązane w §. 4. rozdziału I. Wszystkie więc tam rozumowania nasze i prawidła z nich wyciągnięte stają się w teraźniejszym przypadku dla nas nieużyteczne; ponieważ w Zrównaniu $bx^2+(c+b^2)x+bc=a$ włożyłkie Rozdziału pierwszego działania wyczerpawszy, nie przyjdziemy nigdy do wyrażenia x przez funkcją samych ilości znanych a, b, c . Gdyby nawet w Zrównaniu naszym nie znajdował się termin $(c+b^2)x$, ale tylko $bx^2+bc=a$, i tak jeszcze kufzenia nasze podług pierwszych sposobów byłyby daremne, dla tego że ilość nieznaną jest samey siebie mnożnikiem. Pamiętaj na sposoby do rozwiązania Zrównań w §. I. użyte, a oświecenie razem przyczyną dla czego te w teraźniejszym przypadku nie mogą nam pomóc, wpadamy łatwo na tę uwagę: że działanie przywiązane do teraźniejszego stanu ilości nieznaney, jest zapewne inne od tych, które nam tam służyły. Iakoż ilość nieznaną nacechowaną wykładnikiem jakimkolwiek pokazuje mnożenie samey przez się; mnożyć zaś ilość lub funkcją same przez się nazywa się w Arytmetyce *Wynosić ją do potęgi*; aże działaniu Arymetycznemu to

samę zachodzą w literach co i w liczbach, należy nam zatrzymać się teraz nad tym nowym ich gatunkiem. Pokazuje się z wyższego opisu że potęga iakiękolwiek funkcyi lub ilości nie innego nie jest, tylko mnogość wypadająca z powtarzanego téż funkcyi lub ilości przez siebie mnożenia; oznaczają ona się przez wykładnika nad ilością lub funkcją położonego; tak, że jeżeli ilość lub funkcyą iaką wchodzi dwa razy w mnożenie, wykładnik 2 oznacza ię potęgę drugą n.p. $x^2 = (x+a)^2$; jeżeli trzy razy, wykładnik 3 oznacza potęgę trzecią, n.p. $x^3 = (x+a)^3$; jeżeli n razy, n.p. $x^n = (x+a)^n$, wykładnik n oznacza ię potęgę iakąkolwiek n . Szczo oczywście się wnosi: że ponieważ liczby naturalne oznaczają wielości iedności w sobie zawartych pewne potęgi; chcąc ilości iakie samotne całkie lub łomane wynosić do iakiękolwiek potęgi, nie potrzeba nam tylko przez wykładnika téj potęgi rozmnożyć wykładnika samej ilości, a nowy wykładnik s téj mnogości powstaiający położony nad ilością, wyda potęgę którejśmy szukali; chcąc n.p. x , albo $\frac{x^2}{a^2}$, wynieść do potęgi czwartej

tęj której wykładnik jest 4, wypadają mi z reguły poprzedzającej $x^4 = \frac{x^{2 \cdot 4}}{a^{2 \cdot 4}} = \frac{x^8}{a^8}$ potęga czwarta

ilości podanych. Iako więc mnożenie ilości odbywają się przez dodawanie; tak wynoszenie ich do potęg, przez mnożenie wykładników. To samo prawidło rościaga się do wżyskich iakimkolwiek sposobem zawikłanych funkcyi n. p. $(x+a)^2 = (x+a+b+c+)^2$ i t. d. ale w tym ostatnim przypadku wykładniki znaczą tylko działanie, które zachodzi. Przyśtąpmy teraz do wykonywania onęgo.

Wziąwszy funkcją złożoną z dwóch terminów $x+a$, rozmnożmy ją samę przez się, otrzymamy $(x+a)(x+a)$

$$= x^2 +$$

$= x^2 + 2ax + a^2$. Ten wypadek odkrywają nam tę prawdę o częściach wchodzących w drugą potęgę funkcji DWU-WYRAZOWEY (*binomium*): że każda takowa potęga zamyka w sobie potęgę drugą pierwszego terminu x , to jest x^2 ; potęgę znowu drugą drugiego terminu a , czyli a^2 ; i dwie mnożności z pierwszego terminu przez drugi $2ax$; ta prawda o częściach potęgi drugiej powstającej z funkcji dwuwyrzowej służyć nam może do wynoszenia funkcji z więcej wyrazów złożonej, n.p. $x+a+b$, wzięwszy bowiem dwa terminy $x+a$ za jeden, mamy podług wyższego twierdzenia $(x+a+b)^2 = (x+a)^2 + 2(x+a)b + b^2$, a włożywszy wartość $(x+a)^2$, i wykonawszy mnożenie z $2(x+a)b$, otrzymamy $x^2 + 2ax + a^2 + 2bx + 2ab + b^2$; mając cztery terminy w funkcji $x+a+b+c$, możemy wziąć trzy pierwsze za jeden, a stosując zawsze do niego twierdzenie wyżej wyłożone, wypadnie: $(x+a+b+c)^2 = (x+a+b)^2 + 2(x+a+b)c + c^2$, gdzie kładąc za $(x+a+b)^2$, wyżej znaną wartość, i wykonując w drugim terminie mnożenie, przyjdziemy do $x^2 + 2ax + a^2 + 2bx + 2ab + b^2 + 2cx + 2ac + 2bc + c^2 = (x+a+b+c)^2$. Ten sam sposób zachowując w funkcji z ilekolewiek bądź terminów złożonej, przerobiemy ją na funkcję dwuwyrzową, a mając wzgląd na części, które istotnie wchodzić powinny w skład funkcji dwuwyrzowej; patrafiemy wyrazić natychmiast drugą potęgę funkcji złożonej nawet z nieskończonej liczby terminów: i tak jeżeli dobrze rozważymy prawo zachodzące w układzie drugiej potęgi tych funkcji, które nam dopiero służyły za przykład; postrzeżemy, że n. p. $(x+a+b+c+d+e+f+g+ \text{i t. d.})^2 = x^2 + 2ax + a^2 + 2bx + 2ba + b^2 + 2cx + 2ca + 2bc + c^2 + 2dx + 2ad + 2bd + 2cd + d^2 + 2xe + 2ae + 2be + 2ce + 2de + e^2 + 2fx + 2fa + 2fb + 2fd + 2fe + f^2 + \text{i t. d.}$ to

Dz

jest:

Tłumaczy się
skład potęgi
drugiej, i spo-
sób wynosze-
nia do niej fun-
kcji wielowy-
razowych.

jest: wyniosłszy pierwszy nasamprzód termin do potęgi drugiej, ten który po nim następuje należy rozmnożyć przez 2 i przez poprzedzający, potem zrobić z niego potęgę drugą: i tak idąc do innych, każdego należy rozmnożyć przez 2 i poideyńczo przez wszystkie poprzedzające, a stanawszy na tym rozmnożonym przez 2, wynieść go samego do potęgi drugiej: tym sposobem postępując, potrafiemy funkcji iakiękolwiek wyrazić natychmiast potęgę drugą.

Wzór ogólny
Zrównania i fun-
kcji drugiej
potęgi.

Dopiero wyłożone prawo służy nam do rozeznania czyli funkcya iaka jest zupełną potęgą drugą, i do oddzielenia w funkcji iakiękolwiek tych terminów które w ródzay drugiej potęgi wchodzi, od tych które są obce i dorzucone. Co się tycze uwagi nad samą ilością nieznaną, z ostatniego przykładu widzimy, że jeżeli ilość takowa wchodzi w funkcya iaką wyniesioną do drugiej potęgi, ta znajdzie się raz samotną w drugiej potędze, drugi raz rozmnożoną przez wszystkie terminy podwoione, to jest: $x^2 + 2(a+b+c+d+e+f+g + \text{i t.d.})x$, toż samo służy i wszystkim innym. Przeto ponieważ mnożnika $2(a+b+c+d+e+f+g + \text{i t.d.})$ z samych ilości znanych, wyrazić możemy przez jedną ilość, znaną n.p. A ; w każdej funkcji zamykającej jedną nieznaną ilość i wyniesioną do potęgi drugiej, terminy z tą nieznaną ilością przywodzą się do tego wyrazu $x^2 + Ax$, wszystkie zaś inne będą znane które znowu wyraziwszy przez D , wzór $x^2 + Ax + D$ wystawia nam funkcya iakąkolwiek drugiej potęgi z jedną ilością nieznaną i innemi znanemi bądź należącemi do téj potęgi bądź obcemi: tak iako $x^2 + Ax + D = 0$ pokazuje wszystkie Zrównania zamykające funkcya drugiej potęgi z jedną ilością nieznaną. Zachowajmy sobie tę uwagę w pamięci.

§. XII.

Jeżeli mnożenie funkcji iakię samej przez się powtórzyć będziemy kilkokrotnie, rodzą się stąd różne potęgi wyższe téj funkcji. Gdyby więc można z wielu

wielu przykładów dostrzec prawa, które zachowuje funkcya wyniesiona do potęgi iakiękolwiek, mogli- ^{Składi wła-}
 byśmy podał wzór ogólny wyrażający to prawo; ^{ności wyz-}
 który służąc na iakąkolwiek potęgę, oszczędziłby nam ^{szych iakich-}
 pracy przywiązanej do kilkokrotnie powtarzanego ^{kolwiek po-}
 mnożenia. Poprzedzający §. powinien nam być po-
 dał myśl tego dociekania. Weźmy sobie więc dwu-
 wyrazową funkcją $x \pm a$, i mnożąc ją dwa, trzy,
 cztery, i więcej razy samę przez się, przyjdziemy do
 różnych potęg zawartych w następującej Tablicy:

I. $x \pm a$

II. $x^2 \pm 2ax + a^2$

III. $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3$

IV. $x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4$

V. $x^5 \pm 5ax^4 + 10a^2x^3 \pm 10a^3x^2 + 5a^4x \pm a^5$

i t. d.

tę wszystkie potęgi dobrze rostrząśnione i sfosowane
 między sobą co do ilości, wykładników, współczyn-
 ników i znaków; dają nam oczywiście widzieć

Naprzód: że liczba terminów każdej potęgi prze-
 wyższa jednością swego wykładnika; potęga więc m
 zamykać będzie $m+1$ terminów. Nazwawszy pier-
 wszą potęgę z której się rodzą inne, PIERWIASTKIEM;
 widzemy

Powtóre: że pierwszy termin iakiękolwiek potęgi,
 jest pierwszy termin pierwiastku samotny z wykła-
 dnikiem tej potędze właściwym, który w następują-
 cych terminach zmniejsza się zawsze jednością póki
 w ostatnim nie zniknie; wykładnik zaś drugiego ter-
 minu pierwiastkowego rośnie tyle, ile się pierwszy
 zmniejsza, poki doszedłszy najwyższej liczby nie za-
 kończy samotnym swym terminem potęgi tak, iak ją
 pierwszy zaczął. W potęgę więc m , co do wykła-
 dników zachodzić będzie taki porządek:

$$x^m, x^{m-1}a, x^{m-2}a^2, x^{m-3}a^3, + \text{i t. d. } a^m$$

D3

Potrzenie:

Potwierdzenie: jeżeli znaki pierwiastku są obydwa dodatnie, wszystkie terminy będą dodatnimi; jeżeli zaś obydwa odjemne, wszystkie potęgi wykładników parzystych będą dodatnie, wszystkie zaś nieparzyste będą odjemne; jeżeli na koniec jeden termin pierwiastku jest dodatnim a drugi odjemnym; znaki w potęgach idą na przemian, tak że wszystkie terminy w porządku parzystym są odjemne; wszystkie zaś inne w porządku nieparzystym są dodatne.

Poczwarte: Co do współczynników prawo zdaie się być zawikłane; uważając ich atoli pilnie, znajdziemy: że każdy współczynnik drugiego terminu jest równy wykładnikowi potęgi, w innych zaś równa się mnogości z współczynnika przez wykładnika x w terminie poprzedzającym, rozdzielonemu przez liczbę porządku, który tenże termin poprzedzający zastępuje w potędze: i tak trzeci termin potęgi piątej $10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$;

toż samo mówić o innych. S tych wszystkich uwag wypada że potęga m funkcji dwu-wyrazowej $x \pm a$ tak się uktada:

$$(x \pm a)^m = x^m \pm mx^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3}a^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4}a^4 + \text{i t. d.} \pm a^m$$

w ostatnim terminie znak wyższy należeć będzie do liczby m parzystej, niższy zaś kiedy za m weźmiemy liczbę nie parzystą.

Ten wzór służący nam na wynoszenie funkcji dwu-wyrazowej do jakiejkolwiek potęgi, jest znany pod imieniem *wzoru Newtona*, który go naśmprzód odkrył. Wyciągnęliśmy go s prostej obserwacji i analogii między potęgami dostrzeżonej: co nie może mieć mocy dowodu matematycznego, którego szukać należy w początkach ogólnych do natury funkcji przywiązanych. Zostanie nam się ten dowód do dalszych wiadomości, gdzie nam się pokaże związek te-
raźniejszych

rażnięjszych uwag z ogólniejszemi prawdami i użycie wzoru Newtona daleko rozległéjsze. Gdyby funkcya pierwiastkowa zamykała więcej terminów; moglibyśmy ich dwa, trzy, i więcej brać za jeden, tak iak w §. XI, tych potem różne znakowane potęgi podług tablicy na swe terminy rozebrawszy; i podłożywszy przyzwoicie ilości porządkowey, przyzlibyśmy do wyrażenia potęgi iakieykolwiek m , funkcyi KILKO-WYRAZOWEY (*Polynomium*). Trzebaby nam ieszcze sposób ten posunąć aż do funkcyi złożonéy z nieskończonéy liczby terminów, ile że takowy rachunek w wyższych częściach Matematyki barzo się często nadarza, ale żebyśmy nie rozwlekli nadto ciągu naszych myśli, odkładamy to sobie na inné miejsce. Nie możemy tu jednak opuścić iednéy ważnéy uwagi, która nam pokazuje piękną własność funkcyi iakieykolwiek wyniesionéy do potęgi m : zależy ona na tém, iż rozebrawtzy $(a+x)^m$ na swe terminy, i każdemu z nich podłożywszy liczbę z postępu Arytmetycznego 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, i t. d. jeżeli każdy termin rozmnożemy przez liczbę mu podłożoną, i mnogości té dodamy razem, wypadnie $mx(a+x)^{m-1}$, to jest: potęga zniży się o ieden stopień, ale będzie rozmnożoną przez ilość nieznana i swego dawnego wykładnika. Zobaczmy to w rachunku:

$$\begin{aligned}
 &= a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}x^3 \text{ i t.d.} \\
 &\quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \text{i t.d.} \\
 \text{Mnog: } &mx \left(a^{m-1} + (m-1)a^{m-2}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} a^{m-3}x^2 + \right. \\
 &\left. \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4}x^3 + \text{i t.d.} \right) = mx(a+x)^{m-1}.
 \end{aligned}$$

s kąd wypada, że jeżeli potęgi iakieykolwiek $(a+x)^m$ terminy mnożyć będziemy przez terminy postępu Arytmetycznego. 0k, 1k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k, i t. d. otrzymamy $mkx(a+x)^{m-1}$ gdyż takim sposobem

mnożemy naprzód terminy przez $a, 1, 2, 3, 4, 5$, i t.d. s kąd wynika $mx(a+x)^{m-1}$, powtóre przez k , s kąd znowu wyniknąć powinno $kmx(a+x)^{m-1}$. Jeżeli potęga m będzie mnożoną przez jakąkolwiek funkcją N , to jest $N(a+x)^m$; rozmnożywszy potem tey terminy przez $ok, k, 2k, 3k$, i t.d. otrzymamy na mnogość $Nmkx(a+x)^{m-1}$; położmy więc $Nmkx=A$, $m-1=n$ będzie $A(a+x)^n$, którey znowu terminy mnożąc przez postęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k$, i t.d. otrzymamy mnogość $Ankx(a+x)^{n-1}=m(m-1)Nk^2x^2x(a+x)^{m-2}$; nazwawszy $m(m-1)Nk^2x^2=B$, $m-2=p$, będzie $B(a+x)^p$, a mnożąc znowu przez postęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k$, i t.d. otrzymamy mnogość $Bpkx(a+x)^{p-1}=m(m-1)(m-2)Nk^3x^3(a+x)^{m-3}$ ten znowu mnożąc przez $ok, k, 2k, 3k$, i t.d. wypadnie nam $m(m-1)(m-2)(m-3)Nk^4x^4(a+x)^{m-4}$, i ogólnie mówiąc: $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-[n-1])Nk^nx^n(a+x)^{m-n}$, jeżeli n razy terminy

takowey potęgi mnożyć będziemy przez postęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k$, i t.d. Uczyniwszy $N=1$, widziemy w ostatnim wzorze tę ogólną prawdę: że chcąc funkcją jakąkolwiek wynieść do potęgi m , zniżyć o tyle stopni ile nam się podoba, potrzeba ją następnie mnożyć tyle razy przez postęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k$, i t.d. sposobem dopiero wyłożonym, ile jedności zamyka liczba wyrażająca zniżenie. W tém atoli zniżeniu zawsze nieznaną ilość wchodzi za mnożnika z wykładnikiem tym, który nam zniżenie pokazuje, a zatem zniżenie to potęgi nie zniża zrównania, w którym takowa potęga z innymi funkcjami zachodzi.

§. XIII.

Odbywwszy sposób wynoszenia funkcyi do iakichkolwiek potęg, zostaje nam ieszcze wynaleść inny wywrotny, za pomocą którego moglibyśmy od potęg przysiąść do samych funkcyi, z którey potęga iaka powstała.

wstała. Takową funkcją nazwaliśmy PIERWIASTKIEM POTĘGI (*Radix Potentiae*), i szukanie funkcji któraby powtarzanem mnożeniem wydała mogła potęgę daną nazwiemy WYCIĄGANIEM PIERWIASTKÓW (*Extractio Radicum*). A iako na cechowanie każdego zachodzącego działania stanowiąliśmy znaki ostrzegające nas o gatunku roboty, tak na znaczenie pierwiastków uży-

jemy cech $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[n]{n}$; liczby w otworzystości tych znaków położone są wykładniki potęg, któ-

rych pierwiastku szukamy; i tak n.p. $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ znaczy pierwiastek trzeciý potęgi do wyciągania z funkcji między nawiasami zawartý, a ponieważ potęga druga jest najniższa z potęg, w których wyciąganie pierwiastków zachodzi, dla tego znak iey pisać będziemy bez żadnego wykładnika i tak \sqrt{x} znaczyć będzie pierwiastek potęgi drugiej z x .

Mówiąc o potęgach jedno-wyrazowych dostrzegliśmy że w działaniu ich należy nam wykładnika ilości mnożyć przez wykładnik potęgi, więc w działaniu przeciwném, jakim jest terazniężyć, potrzeba nam wykładnika ilości dzielić przez wykładnik potęgi której szukamy pierwiastku, a wieloraz s tego podziału będzie wykładnikiem pierwiastku szukanego. Chcąc n.p. wynaleźć pierwiastek drugiej potęgi ilości x^2, x^3, x^4, x^5 , i t. d. dzieląc każdego wykładnika przez

2, wypadają pierwiastki $x, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^4}, \sqrt{x^5}$, które się równają tym wyrazom $\sqrt{x^2}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^4}, \sqrt{x^5}$, s czego wypadają następujące prawdy.

Naprzód. Ze wszystkie ilości i funkcye z wykładnikami łamanemi są PIERWIASTKOWE (*Radicabes*) tak; że licznik ułamku jest wykładnikiem ilości lub funkcji, mianownik zaś wykładnikiem znaku pierwiastkowego; wszystkie więc funkcye pierwiastkowe możemy albo przez znaki albo przez wykładniki

ułamkowe wyrażać, i tak $(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}$, albo $\sqrt[3]{a^3+b^3}$
Dy to samo

to samo znaczy. Ilości zaś lub funkcyje z wykładnikami odjemnemi ponieważ są równe jedności rozdzieloney przez tęż ilość lub funkcyą §. 3. przeto wyrazy $x^{-\frac{3}{2}}$, $y^{-\frac{m}{n}}$ i t.d. jedno znaczą co

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{y^{\frac{m}{n}}} \text{ albo } \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{\sqrt[n]{y^m}}$$

Powtórze: Jeżeli w ilości lub funkcyi iakiey znajduje się mnożnik którego wykładnik rozdzielić się zupełnie może przez wykładnika znaku pierwiastkowego, takowy mnożnik może bydź wydobyty s pod znaku, i na ten czas funkcyą składać się będzie z ilości pierwiastkowych, i z ilości bez znaku, które nazwiemy WYMIERNEMI (*rationales*) n. p.

$$\sqrt{4x^2a^3} = 2x\sqrt{a^3} = 2ax\sqrt{a} \quad - \quad \sqrt[3]{8a^3(b+x)} =$$

$2a\sqrt[3]{(b+x)}$. i t. d. tym sposobem wydobywając ilość s pod znaku uprościamy funkcyą: gdyby nam znówu przeciwnie potrzeba było funkcyą przywieść do jednolitego wyrazu, to jest ilości wszystkie wymierne podciągnąć pod znak pierwiastkowy nie naruszwszy ich wartości, każdy oczywiście widzi, iż w ten czas potrzeba wynieść funkcyje wymierne do tej potęgi którą oznaczają pierwiastek. Chcemy n. p. w funkcyi $3x(a+b)\sqrt{(y^3+c)}$ podciągnąć wszystkie ilości pod znak pierwiastkowy, otrzymamy: $\sqrt{(9x^2[a+b]^2[y^3+c])}$. który wyraz to samo znaczy co i przeszły. Te wszystkie sposoby przerabiania funkcyi wyciągnięte s prostych. bardzo uwag nad naturą pierwiastków będą nam bardzo często pomocne, trzeba żebyśmy się w nie dobrze wprawili, aby sobie oszczędzić trudności na które napadamy w rachunku.

Nauczylismy się już znaczyć, i czytać znaczenia pierwiastkowych funkcyi; zostaje nam teraz wynaleść prawidła służące do wyciągania pierwiastków s funkcyi iakimkolwiek sposobem zawikłanych.

nych. Te że bydź mogą albo zupełnemi potęgami albo też niezupełnemi; w pierwszym razie powinniśmy przyiść przez pewne prawidła do ich pierwiastku wymiernego; w drugim zaś przypadku znależdź możemy pierwsze pierwiastku terminy ale reszta zostanie się pod znakiem, tak iak doświadczyliśmy w dzieleniu; i takowe funkcy nazywają się NIEWYMIERNEMI (*Irrationales*), ile więc razy będziemy mieć do czynienia s funkcją lub zrównaniem potęgi niezupełnej przestaniemy w działaniu na naznaczeniu tego pierwiastku, który do wyciągania zachodzi i tak n. p. mając zrównanie $x^m = a$, a chcąc znależdź wartość

tey nieznaney, wyrażemy ją $x = \sqrt[m]{a}$. Ten ostatni rodzaj rachunku o potęgach niezupełnych zostawiamy sobie na potem, zatrzymamy się tylko teraz nad pierwszym.

Pamiętamy o uwadze wyżey uczynioney, że w potęgę zupełną iakąkolwiek wchodzą prócz liczb, te same ilości które należą do pierwiastku, nie zostaje nam tylko te ilości wydobydź przez działania na to potrzebne. Nad to zaś nic łatwiejszego; wiemy naprzód że pierwszy termin potęgi iakiękolwiek jest samotną potęgą pierwszego członka pierwiastku, więc go zaraz wydobędziemy przez dopiero podaną regułę na funkcy iedno-wyrazowe, to jest dzieląc wykładnika ilości przez wykładnika pierwiastku, n. p. z funkcyi $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ chcąc wyciągnąć pierwiastek

trzeci potęgi mamy $x^3 = x$ za pierwszy termin pierwiastku. Drugi termin potęgi zawierać będzie drugi członek pierwiastku rozmnożony przez funkcją pierwszego n. p. $3ax^2$, zamykając a , rozmnożone przez $3x^2$, zrobiwszy tedy tę funkcją, i rozdzieliwszy przez nią drugi termin, wynaydziemy drugi członek pierwiastku n. p. $\frac{3ax^2}{3x^2} = a$; ten potem kombinując z pierwszym tak ażeby wypadły te wszystkie terminy, którekol-

wiek powstałą z dwóch tych członków pierwiastku w potęgę; odciągniemy ich od siebie, i znieśliśmy to, co te dwa terminy pierwiastku wprowadziły w potęgę. Tym sposobem dalej postępując przyjdziemy do wyciągnięcia pierwiastku z jakiegokolwiek potęgi zupełnej. Przypatrzmy się z uwagą wzorowi działania.

Potęga 3cia. $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ Pierwiastek ię

Działanie. x^3 x Pierwszy człon:

Potęga z pierwi:

do odciągnięcia $-x^3$

Reszta z potęgi $- 3x^2a + 3xa^2 + a^3$.

Dzielnik z 1go człon:

ka pierwiastku $3x^2$ $+a$ - 2gi członek.

Funk: obydwóch człk

do zglądzenia wszy

tych terminów. $-3x^2a - 3a^2x - a^3$

Reszta $x+a$ } pierwiastek cały

Tą samą drogą idź należy w jakichkolwiek potęgach niższych i wyższych, gdzie zaowu widzemy, że ponieważ litery swoją ogólnością wyrażają nam działania zachodzące w jakimkolwiek terminie, dać nam zaraz czytać reguły potrzebne na wydobycie pierwiastków s potęgi. Te reguły rościagnąć możemy do wyciągania jakichkolwiek pierwiastków z liczb, używając wzoru s tablicy wyżej podanę na potęgę której szukamy pierwiastku. Zadamy sobie n.p. do wyciągnięcia pierwiastek 3ciej potęgi z liczby 34,965,783(B) za pomocą wzoru $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ (A)

Niżeli przyśtapiemy do samego działania, zbliżmy sobie wszystkie uwagi z wyższych wiadomości powzięte, a potrzebne do terażniejszej roboty.

Náprzód: wiemy s samego przypatrzenia się że wzór (A) nie zamyka tylko dwa członki pierwiastku $x+a$, więc nam także pierwiastek liczebny rozdzielić potrzeba na dwie części, s których jedna odpowiadałaby x , drugą zaś a ; to otrzymamy dzieląc liczbę

liczbę pierwiastku na dziesiątki odpowiadające x , i na jedności odpowiadające u ; a ponieważ sta, tyśiące, i t. d. dzielić się mogą na dziesiątki, więc gdyby nawet pierwiastek liczebny zamykał w sobie sta, tyśiące i t. d. wszystkie te razem weźmiemy za pierwszy człon i wyrażemy przez x w dalszych działaniach, abyśmy pierwiastek na dwie tylko części rozdzielony uważali.

Powtóre: potrzeba nam w potęgze liczebney (B) oddzielić te dwie części. Ponieważ $x=10$; $x^3=1000$; w działaniach zaś Arytmetycznych gdzie mnożenie odbywa się od prawey na lewą stronę, i gdzie dziesiątki powstają z mnożenia jedności, nayspierwszy względ obrócić powinniśmy na jedności aby im oddzielić tyle figur, ile ich zawierać może potęga trzecia naysiękkszej jedności jaką jest 9.. Dzielę więc kreśką od prawey na lewą stronę podaną liczbę (B) na rzędy, naznaczając każdemu trzy figury. Działanie które mamy teraz tłómaczyć widzieć możemy na tablicy tu przyłączoney.

Pierwszy rząd 34 odpowiada x^3 w wzorze (A): szukam więc liczby, którejby trzecią potęgą albo wyrównała, albo przynajmniej naysiękkszą była 34; taką jest 3, która będąc pierwszym członkiem pierwiastku, nazywam ją x ; wynoszę potym $x=3$, do potęgi trzeciej i mam 27, które odciągnawszy od 34, zostało mi się 7: do téy reszty znoszę rząd następujący 965.

Uważam liczbę 7965 jako zawierającą inne terminy wzoru (A) to jest: $3x^2a+3xa^2+a^3$; żebym wyciągnął a drugi członk pierwiastku; dzielę pomienioną liczbę przez $3x^2$ to jest przez $3 \cdot 9=27$, a ponieważ x znaczy dziesiątki, więc x^2 znaczy sta, podpisuję więc dzielnika 27 tak, aby jego ostatnia figura przypadła pod sta liczby podzielney; zapełniam potém resztę mieysć próżnych przez zero; a wykonawszy dzielenie otrzymam 2 na drugi członk pierwiastku, który nazywam a ; przez a mnożę dzielnika i otrzymam $3x^2a$; robię potém inne terminy $3xa^2$, a^3 , i te razem dodawszy odciągám od 7965.

Zo-

Została mi reszta 2197, do której zniośliśmy ostatni rząd 78; biorę obydwie części pierwiastku 32 za ieden, który nazywam x . Uważam znowu liczbę 2197783, jako zamykającą terminy $3x^2a + 3xa^2 + a^3$; żebym z niej wyciągnął a , dzielę ją przez $3x^2 = 3 \cdot (32)^2 = 3072$, podpisuję tego dzielnika tak iak i przedtem, i z dzielenia otrzymam 7, za nowy członek pierwiastku który nazywam a , przez ten mnożąc $3x^2 = 3072$, i potem robiąc inne terminy $3xa^2 + a^3$ dodać je razem, s których summy powstaie liczba nie zostawiająca żadnej reszty. Gdyby jeszcze liczba (B) zamykała więcej rzędów, zawszebyśmy po każdym odcinaniu wszystkie członki pierwiastku brali za ieden, i nazywali je x , a szukając nowego, a postępowałibyśmy sobie tak iak teraz.

Ten sam sposób służyć nam może do wyciągania iakichkolwiek pierwiastków z liczb, używając zawsze wzoru przyzwoitego. I tak szukając pierwiastku potęgi m , dzielić potrzeba na rzędy s prawey strony na lewą, i każdemu dać m figur. z nayıpierwszego rzędu po lewey stronie wyciągnąć pierwiastek x potęgi m , a wyniośli go znowu do téy samey potęgi odcinając od rzędu; zniesć potem do reszty następujący rząd, rozdzielić go przez mx^{m-1} podsunąwszy dzielnika o $m-1$ figur dalej od prawey strony: za pomocą dzielenia wynaydzie się a , które z x kombinowane przyzwoicie da wszystkie terminy wzoru Algebraicznego, których sumnę odcinając należy od liczby podzielney. Tym sposobem n.p. za pomocą wzoru

$x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$ wyciągniemy z liczby 3802,04032 piéwiastek 5ty potęgi $= 52$.

Tu náywięcej powinniśmy uczuć korzyści, którą z ogólnych znaków Algebraicznych zbieramy. Naprzód wyciągamy reguły na działania nigdy niedostępne Arytmetyce, z náygruntowniejszemi onychże dowodami. Powtóre: przywyknąwszy raz do tego używania wzorów

wzorów nigdy tych reguł nie możemy zapomnieć; albo zapomniawszy, w jednym momencie możemy je sobie przywieść na pamięć. Nie tylko więc drogi wynalazku i przekonania dla rozumu, ale i dla pamięci wielka folga jest w ogólności znaków ukrytą.

§. XIV.

Nie zapomniemy o tem że w te wszystkie działania dotąd rostrzane byliśmy wciągani przez uwagę nad równaniami przywiedzionemi na początku tego rozdziału. Widzieliśmy tam, że wszystkie sposoby w Rozd. I. wyłożone, nie pomogą nam do rozwiązania równań $bx^2 + (c+b^2)x + bc = a$, $bx^3 + (c+bd+b^2)x^2 + (cd+c+bd)x + cd+c = d$, i innych, w których x wyniesione było do potęg wyższych; trzeba nam więc użyć tych praw nowo odkrytych w naturze potęg i pierwiastków do rozwiązania terazniejszych równań, czyli do wynalezienia x w funkcji ilości znanych. Weźmy z nich pierwszże $bx^2 + (c+b^2)x + bc = a$ czyli $x^2 + \frac{c+b^2}{b}x + c - \frac{a}{b} = 0$, ponieważ w

Rozwiązanie
się Zrównanie
2go stopnia.

niem x znajduje się wyniesionem do drugiej potęgi, uważać możemy całe równanie jako potęgę drugą z niewiadomej x , i s pewnej funkcji ilości wiadomych: ta więc zawarta jest w wzorze powszechnym $x^2 + Ax + D = 0$ w któreśmy pod §. XI. chcieli ogarnąć wszystkie iakiękolwiek równania zawierające niewiadomą x w drugiej potędze. Znosząc zaś ogólne równanie z podanem, wypadają $A = \frac{c+b^2}{b}$; $D = c - \frac{a}{b}$

Ponieważ potęgi w równaniu ogólnem zawartę częścią pierwiastku jest x , gdybyśmy mogli przyiść do znalezienia dokładnego pierwiastku równania $x^2 + Ax + D = 0$ przyszlibyśmy do równania takiego, iakiśmy w Rozd. I. rozwiążali, a zatem do wartości ilości nieznaney.

Wiemy

Wiemy z dopiero odbytych działań że pierwiastek iakiękolwiek potęgi nie może być dokładnie wyciągniony, tylko kiedy ta potęga jest zupełną; potęga zaś druga do swojej pełności potrzebuje podług wyższych początków takiego wyrazu $x^2 + 2ax + a^2$; nie możemyż równania naszego tak przypościć aby jeden jego członek zawierający x , miał te wszystkie części do zupełnej potęgi potrzebne? Przekonywaliśmy o tem podobieństwie samo lekkie zastranowienie się nad naturą równania, w którym można bez naruszenia związku cokolwiek chcemy, działać, byleby te działania z obydwóch stron równania zachodziły. Przenieśmy więc naprzód wszystkie terminy znane z drugiej strony równania i otrzymamy

$$x^2 + Ax = -D \quad (A).$$

dopełnimy teraz cokolwiek brakuje pierwszemu członkowi do drugiej potęgi, to jest dodamy z obydwóch stron $\frac{A^2}{4}$ a wypadnie

$x^2 + Ax + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{4} - D$; równanie którego pierwszy członek jest zupełną potęgą drugą; wyciągnąwszy więc pierwiastek z obydwóch stron otrzymamy

$x + \frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - D}$, aże potęga druga i go członka równania powstać mogła albo z obydwóch terminów dodatnych albo z obydwóch odjemnych §. 12; zachodzi trudność, czyli pierwiastkowi obydwie te znaki służyć powinny, czyli tylko jeden i który? Na ułatwienie ięj wróćmy się do najpierwszych początków, które nas przywiodły do teraźniejszego gatunku równań. Wyciągliśmy je z innych mających w sobie ilości niewiadome rozmnożone przez inne niewiadome, które lubo były funkcya jednej, zawiązy jednak od różnych między sobą związków; te związki służyły nam na wyrażenie wszystkich innych niewiadomych przez jedną, i przyprowadziły nas do równań zawierających różne potęgi téżże jednej niewiadomej.

wiadomej. To więc ostatecznie równanie stało się składem tylu związków, ile było nieznanych ilości, a zatem rozwiązanie jego odkryć nam je wszystkie powinno: że zaś podług liczby niewiadomych rozmnożonych przez siebie rosną różne potęgi w równaniu, tak że dwie niewiadome ilości przywiodły nas do równania zamykającego x^2 ; trzy niewiadome do równania zawierającego x^3 ; iednym słowem jeżeli w równaniu znajdowałoby się m ilości nieznanych rozmnożonych przez się, byleby wszystkie były funkcją x , wypadnie po wyrzuceniu ich x^m : aże każdej wartości służyć powinno inne znaczenie, to jest inna odpowiedź na pytanie; zaczęłam żadne pytanie nie może nas przywieść do równania różnych potęg tylko to, które ma wiele odpowiedzi, tak że od liczby odpowiedzi przywiązanych do pytania zawisła wielkość potęgi ilości niewiadomej czyli to co nazywają WYMIAR albo STOPNIEŃ RÓWNAŃ, i przeciwnie od stopnia równania na któryśmy natrafili, zawisła konieczna liczba odpowiedzi temu pytaniu służących. Nazywali bowiem Geometrowie równanie drugiego, trzeciego, czwartego, mgo stopnia, w którym niewiadomą znajduje się wyniesioną do drugiej, trzeciej, czwartej, mtej potęgi, tak że wykładnik najwyższy ilości nieznaney jest razem słazówką stopnia równania.

Tę tak oczywistą rachunku wypadki rzucają wielkie światło w metafizykę naszego myślenia. Uczą nas bowiem że iedno pytanie wiązać się może z wielu barzo innemi, które od tej samej kombinacyi myśli zawisły; albo że wiele bydz może razem rzeczy którym te same służą własności w warunkach pytania zawarte. Prawda: że myśląc o iednym pytaniu nie przyjdzie nam prawie nigdy na myśl żeby się z niem inné wiązały; ale to wszystko pochodzi z barzo ciasnych granic naszego pojęcia, i z barzo szczególnego poznawania rzeczy. Gdybyśmy atoli mieli wiadomą w całej obszerności Metafizykę naszych myśli, rozum

nasz ogarniałby rzeczy ogólniey, i znalazłby się w tych wszystkich zakrętach kombinacyi, w które go koniecznie natura rzeczy wciąga, a których on przez niewiedomość początków myślenia nie może rozróżnić. S tąd pokazuje się wielki szacunek rachunku Algebraicznego, który ogólnością swych znaków ogarnia całą ogólność rzeczy i jest náygruntownieyszym dowodem, że doskonałość myślenia zawisła od doskonałości języka. Nie będzie tu od rzeczy uczynić nie-które uwagi Loiczne które nam dopiero wyłożony początek podaje.

Ponieważ od iedney kombinacyi zawisnąć może wiele pytań, w porównywaniu naszych myśli trafić możemy na kilka wniosków od siebie różnych, a wypadających oczywiście s téż saméy kombinacyi; s tych wniosków ieden może rozwiązać naszé zadanie podług doświadczenia, a drugi z niem się wcale nie zgadzając: cóż tego za przyczyna? oto kombinacya nasza przywiązana jest do wielu pytań mimo naszé wiadomość, z którychśmy tylko iedno mieli na myśli: ażé wypadki kombinacyi dobrze zrobionéy są konieczné, wyciągliśmy odpowiedzi na inné pytania związane z naszym. Trzebaby nam się więc cofnąć do pierwszego pytania, i poznać że ono jest ogólnieysze, niżeliśmy się spodziewali, a wyniośliśmy się do téy ogólności odkrylibyśmy przypadki infzé zawarté w naszéy kombinacyi, na które służą té wnioski, które się z naszym pytaniem i doświadczeniem nie kleją. Przytrafić się nawet może że s kombinacyi iakiéy wyciągniemy wypadki doświadczeniu przeciwné, co może pochodzić s tąd, żeśmy odpowiedź iednego pytania wzięli za odpowiedź drugiego. Té wszystkie przeciwności pozoré póty nas nie przestaną zadziwiać, i póty rozum nie wyidzie z dziecinności swoich działań, póki myślenie naszé nie będzie miało tak ogólnych początków, iak są ogólne związki między rzeczami. Tego zaś postępu myślenia nie można tylko od wzrostu Geometrii i od duchów prawdziwie Geometrycznych oczekiwać.

Wszystkie

Wszystkie te rozumowania przekonują nas, że zrównanie 2go stopnia zamyka koniecznie dwa pierwiastki do dwóch znaków przywiązane $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - D\right)}$ $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - D\right)}$, które tyleż dają odpowiedzi na pytanie w niem zawarte. I dla tego to dwoiakiego znaczenia wszystkie funkcy znak pierwiastkowe drugiey potęgi zawierające w ilościach nieznanach, nazywać będziemy *dwó-kształnymi* (*Functiones bifformes*). Objaśnimy wszystkie te prawdy w przykładzie:

Zadanie. „W pewnej Prowincyi liczba mieszkańców n urosta przez dwa lata do liczby d , powiększając się w iednej corocznie proporeyi swoiey ludności, wynaleść liczbę tego wzrostu x , i ludność po pierwszym roku? „

Ieżeli w początku ludność była n , powiększając się liczbą x pierwszy ludności, po pierwszym roku było ludzi $n+nx$, po drugim roku $n+2nx+nx^2=d$, i tak idąc dalej, w trzecim roku będzie ludzi $n+3nx+3nx^2+nx^3=e$, w czwartym roku $n+4nx+6nx^2+4nx^3+nx^4=f$: idąc tak przez dalsze lata trafiemy na zrównania wyższych stopni. Ale teraz nie zatrudniamy się tylko drugim należącym do pytania i do naszego zamiaru. Liczba więc ludzi po dwóch latach zawartą jest w zrównaniu 2go stopnia $n+2nx+nx^2=d$, które nam powinno odkryć wartość na x . Chcąc je rozwiązać podług wyżej wyłożonych reguł i znieść z zrównaniem ogólnem (A) przywiedźmy je

$$\text{do wyrazu } x^2+2x=\frac{d-n}{n}$$

równając je potem z (A) będziemy mieli $A=2, D=\frac{n-d}{n}$ a zatem $\frac{A^2}{4}=1$, więc:

$$x^2+2x+1=\frac{d-n}{n}+1 \quad x+1=\pm\sqrt{\left(\frac{d-n}{n}+1\right)}$$

$$x=-1\pm\sqrt{\left(\frac{d-n}{n}+1\right)}$$

E2

Dáymy

Damy teraz że liczba pierwiastkowej ludności $n=10.000$, liczba ludności po dwóch latach $d=90.000$; włożywszy te wartości w równanie, wypadnie $x=-1 \pm \sqrt{9}$, to jest $x=2$, $x=-4$, pierwszą wartość na x należy do wzrostu ludności, i uczy nas, że do liczby każdego roku przybywała liczba ludzi roku poprzedzającego rozmnożoną przez 2, było więc ludzi po pierwszym roku $10.000+20.000=30.000$, po drugim $30.000+60.000=90.000$.

Druga wartość na $x=-4$ będąc odjemną, należy podług wyższych wiadomości do odludnienia, to jest: że gdybyśmy byli chcieli rachować niszczącą corocznie ludność kraju w iednej proporcji; trafilibyśmy byli na to samo równanie, a zatem oba te pytania od iednej zawiły kombinacji. Zeby więc po dwóch latach brakowało 90.000 mieszkańców; przypuściliśmy że ich zaraz ubyło 10.000, potrzeba do tego, aby odludnienie w każdym następującym roku było cztery razy większe iak w pierwszym: brakować ich więc będzie w pierwszym roku 50.000, w drugim 90.000. Zeby więc liczbę zgałego obywatela w równej liczbie lat, ludnością iednostayną nadgrodzić, trzeba żeby się miało zaludnienie do niszczenia iako 2: 4.

§. XV.

Znaczenie i własności pierwiastków wrońskich. Wróćmy się teraz od przykładu do początków zofawionych. Ponieważ równanie $x^2+Ax+D=0$, i iego pierwiastki $x=-\frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}A^2-D)}$, wystawia nam równania drugiego stopnia; zawierać ono powinno w sobie wszystkie szczególne przypadki tychże równań i własności do nich przywiązane. Jeżeli więc uczyniemy w niem $A=0$ zostaje się równanie bez drugiego terminu $x^2=-D$, i iego pierwiastki $x=\pm\sqrt{-D}$. jeżeli więc D jest funkcją odjemną; x^2 będzie dodatnie, i równanie będzie zamykać obydwie pierwiastki równe, s których ieden dodatni, a drugi odjemny. Jeżeli zaś D jest dodatnie, x^2 będzie odjemnem. Ale x^2 jest potęgą drugą x , którą podług natury potęg parzystych zawsze być powinna dodatnią

tną bądź ona powstała z funkcji dodatniej, bądź z odjemnej; wynaleśdź więc na x^2 wartość odjemną w zrównaniu, albo na x funkcję pod znakiem pierwiastkowym odjemną, jest to wynaleśdź rzecz przeciwną całej naturze funkcji 2go stopnia; i dla téyci to przyczyny takowe pierwiastki odjemne pod znakami $\sqrt{-}$, $\sqrt[4]{-}$, $\sqrt[6]{-}$, $\sqrt[8]{-}$, i t. d. wzięty imię UROJONYCH (*Radices imaginariae*), które w ostatnich wypadkach pokazują nam niepodobieństwo tego, czego szukamy, dla iakiejsz przeciwności, którą się w pytanie mimo naszę uwagę wmieszała. Takóż do przypadków szczególnych które ogarnia zrównanie, należy zaiste i ten, który to pytanie czyni niepodobnem, i który przez ostatnie wypadki powinien nam być wytknięty. A tak zrównanie każde nie tylko nas prowadzi do prawdy, ale nam i wytyka błąd jeżeliśmy go popełnili. Mielismy tego już przykład w zrównaniach 1go stopnia pod §. 10.

Przypadki więc pierwiastków urojonych zawarte być koniecznie muszą w zrównaniu ogólnem $x^2 + Ax + D = 0$ — $x = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - D}$ do których rozpoznania uważać nam potrzeba wielkość funkcji zostających pod znakiem pierwiastkowym. Dla skrócenia więc języka, znak ($<$) służyć nam będzie za znak wielkości, oznaczając tę ilość, lub funkcję większą, ku której jest obróconą otwartość znaku, tę zaś mniejszą którą się kładzie przy kończyłości tegoż znaku n.p. $x < a$, pokazuje że x jest mniejszem od a , i że a jest większe od x .

Ponieważ funkcja odjemna pod znakiem $\sqrt{-}$ oznacza pierwiastki urojone, rostrząśnimy, kiedy $\frac{1}{4}A^2 - D$ być może odjemnem lub dodatnem. Pewni jesteśmy z poprzedzających początków że $\frac{A^2}{4}$ musi zawsze być dodatnem, iakiękolwiek jest samo A ; jeżeli D jest odjemnem, odciąganiem stanie się dodatne, E_3 więc

więc koniecznie na ten czas $\frac{A^2}{4} - D$ zawsze będzie dodatnem: i równanie 2go stopnia nie ma pierwiastków urojonych.

Jeżeli zaś D jest dodatnem, $\frac{A^2}{4} - D$ będzie tylko w ten czas odjemnem, kiedy $D > \frac{A^2}{4}$, i równanie na ten czas ma obydwa pierwiastki urojone. S tych dwóch tak prostych uwag iefzcze przed rozwiązaniem równania 2go stopnia, możemy poznać czyli ono zamyka pierwiastki rzetelne lub urojone. Te pierwiastki urojone nie wydałyby nam się aż w ostatnich wypadkach, gdybyśmy nie byli dofzli dopiero wyłożonego sposobu na ich rozpoznanie, może więc równanie pokazać się w postaci rzetelney, a jednak zamykać coś niepodobnego. Coż tego za przyczyna? barzo prosta: w pytaniu zadanem może zachodzić przeciwność między iednym warunkiem, i drugim względem iedney rzeczy, ale może zachodzić związek względem drugiej; uważane te warunki w tym ostatnim przypadku prowadzą nas do równania prawdziwego; że zaś to równanie ogarnia wszystkie okoliczności, odkryje się dopiero w wypadku przeciwności, która względem czego zachodzi. Oprócz tego mogą warunki wiązać się s sobą dobrze w pytaniu, ale mogą nie bydź przywiązane tylko do pewnych wartości; jeżeli w nie wprowadzemy wartość która im nie służy, wprowadzemy rzecz niepodobną, i trafiemy na urojone pierwiastki. Zobaczymy to w przykładzie:

Zadanie. „Rozdzielić liczbę 18 na dwie tak, żeby ich mnogość wydała 135,”

Damy że iedna s tych liczb jest x , druga więc będzie $18 - x$, i warunek pytania daie nam Równanie $x(18 - x) = 135$ $\sim 18x - x^2 = 135$ $\sim x^2 - 18x = -135$; a zatem $x = 9 \pm \sqrt{81 - 135} = 9 \pm \sqrt{-54}$, pierwiastki dwa urojone. Pytanie więc nasze jest niepodobne w liczbie 18, ale bydź może podobne w inney liczbie.

Gdybyśmy

Gdybyśmy n. p. zamiast 18 wzięli byli 24, znaleźlibyśmy byli dwie liczby $x=9$; $x=15$, których mnogość równa jest 135 podług warunku pytania.

§ XVI.

Zostawmy sobie na potem przykłady i dalsze objaśnienia naszych początków, a ciągmy dalej naszą uwagę. Przyśzliśmy byli do zrównania 2go stopnia od zrównań zamykających w swych terminach mnogość z jednéj ilości nieznaney przez drugą n. p. $xy+ay+b=0$, uważając y jako funkcją x daną przez inny związek 1go stopnia. Takowe zrównanie jest zaisfe bardzo ogólne 2go stopnia, s którego dopiero wypada $x^2+Ax+D=0$, ale że tamto podług podanych prawideł nie może bydź rozwiązane tylko przywiodłszy ie do tego ostatecznego wzoru. Jednakowóż wyraż iego tak przerobiony nic nie odmienia w iego naturze i związku, a zatem nie narusza żadnego przymiotu iemu istotnego. Jeżeli więc zrównanie $xy+ay+b=0$ uważane bydź powinno iako złożone z dwóch związków różnych lub jednakich, s których ieden służy na x , drugi na y ; i z dwóich wartości równych lub nierównych, ilości nieznanych x, y ; dwie te wartości nie mogły się złożyć razem w zrównaniu, tylko tak iak i same nieznané, to iest mnożeniem iednéj przez drugą. Zrównanie więc $xy+ay+b=0$ uważane bydź powinno iak gdyby było złożone z dwóch wartości zrównań 1go stopnia przez siebie rozmnożonych. Więc i $x^2+Ax+D=0$ które iest zawarte w tamtém podobnie bydź powinno uważane: te dwie wartości pierwszego stopnia wypadają z rozwiązania tego zrównania i są oznaczone w dwóch pierwiastkach, więc dwa pierwiastki zrównania $x^2+Ax+D=0$, to iest

$$x = -\frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - D\right)} \quad \dots \quad x = -\frac{1}{2}A - \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - D\right)}$$

przywiedzione do zero i rozmnożone przez się wydadz powinny samo zrównanie $x^2+Ax+D=0$.

Przywiedzeni więc iestemy tak oczywistą uwagą do działań w funkcjach pierwiastkowych rzetel-

nych lub uroionych. Zatrzymamy się nad niemi.

Działania funkcyj niewymiernych

Działania któreśmy rostrzafali wyżej w funkcyach wymiernych zakładane były na pierwszych własnościach i na naturze samych funkcyj i ilości. Z różnych odmian wypadły różne ich gatunki, te atoli zawsze pokazały nam się uważając iedno działanie sposobem mniej lub więcej rozległym i dzieląc je niby na różne przypadki. Iakżeśmy wynaydowali prawidła na działanie iakie nowe? oto równając to z innem już wiadomem, a podług odmian w tém porównaniu dostrzeżonych, przerabialiśmy prawidła iednego działania na prawidła drugiego; to iest szliśmy zawsze od rzeczy wiadomych do niewiadomych i w szukaniu te ostatnie staraliśmy się zawsze przywieść do pierwszych. Nie odstąpmy więc i teraz od tęj drogi i starajmy się funkcye niewymierne porównać z wymiernemi co do działań w nich zachodzących. Nie możemy namprzód wątpić żeby działania w funkcyach terazniejszych nie przypadały te same, które służyły funkcyom wymiernym. Te bowiem działania nie były skutkiem ich wymierności, ale wypadły z różnych odmian wzrostu lub ubywania, którym podlega ilość podług natury i okoliczności pytania. Te odmiany zachodzić więc mogą w ilościach niewymieraych tak iak w wymiernych; nie zostaje nam teraz tylko prawidła tamtych przyzwoicie stółować do terazniejszych.

Dodawanie i odciąganie,

Wszystkie ilości niewymierne wyrazić się mogą na podobieństwo wymiernych przez wykładniki ułomkowe; przystółowawszy więc to wszystko cośmy mówili o obchodzeniu się z wykładnikami całkiem, do ułomkowych, wynaydziemy to cośmy sobie zadali. A naprzód iako różne litery i wykładniki w funkcyach wymiernych, oddzielały nam te funkcye nie dozwalając ich dorzucać lub odciągać razem chyba przez same tylko znaki, tak różne litery i wykładniki znaków pierwiastkowych w funkcyach niewymiernych tak oddzielały ich gatunki, że ich s sobą łączyć nie można tylko przez znaki n.p. mając \sqrt{a} , \sqrt{ab} , albo

albo $\sqrt[3]{a} - a$, $\sqrt[3]{-3a}$, i t.d. mamy funkcyę tak różną, że ich dodawanie lub odciąganie nie może się stać tylko

przez naznaczenie, to jest: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{-a} + \sqrt[3]{-3a}$. Przeciwnie zaś chcąc dodać lub odciągnąć $\sqrt[3]{ab}$ do lub od $\sqrt[3]{ab}$, albo $\sqrt[3]{-x}$, $\sqrt[3]{-x}$, wypada $\sqrt[3]{ab}$, $\sqrt[3]{-x}$ w pierwszym; $\sqrt[3]{ab}$, $\sqrt[3]{-x}$ w drugim działaniu, bo współ-czynniki liczebne nie odmieniają natury funkcyi.

Mogą częstokroć funkcyę niewymiernę pokazać się na pozór różnemi, lubo w samej rzeczy takimi nie są, n.p. $\sqrt[3]{xa^2}$, $a\sqrt[3]{4x}$, albo $12x\sqrt{-d}$, $2\sqrt{-dx^2}$, na rozeznanie tego należy ich wyraż uproszczyć, wydobywszy s pod znaku te ilości, które bydy mogły wydobyć, lub wciągnąwszy niektóre pod znak podług niedawno przepisane go sposobu w §. 13. a przywiódłszy je takim sposobem do iednostajnego wyrażu pokáže nam się prawdziwe ich znaczenie: i tak w przykładzie naszym $\sqrt[3]{xa^2} = 3a\sqrt[3]{x}$, $a\sqrt[3]{4x} = 2a\sqrt[3]{x}$, $2\sqrt{-dx^2} = 2x\sqrt{-d}$, widzimy teraz że $3a\sqrt[3]{x}$ i $2a\sqrt[3]{x}$, $12x\sqrt{-d}$ i $2x\sqrt{-d}$ są funkcyę jednakie.

Ale mając funkcyę pod różnemi znakami pierwiastkowemi, nie możnażby ich przywieść do iednego

znaku bez naruszenia ich wartości, n.p. $\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{y}$ Przywodzić nie do iednego znaku pierwiastkowego.
 $+ \sqrt[3]{a^2z}$? Odpowiedź na to jest barzo łatwą. Przerabiać wykładnika znaku pierwiastkowego na inny, jest to podwyższyć lub zmniejszyć pierwiastek potęgi w funkcyi pod tym znakiem zostaiący, w tej odmianie ocålemy zupełnie wartość funkcyi, jeżeli samę ilość pod znakiem do tyle wyższej lub niższej potęgi wynieśmy, ile się powiększyć lub zmniejszyć powinien pierwiastek w tém przerobieniu; wykonywamy bowiem tym sposobem dwa działania przeciwné, a zatem to co iedno odmienia w funkcyi, drugie znosi i przywraca ją do dawnéj wartości: i tak n.p. w funkcyi $\sqrt[3]{ax}$ możemy wykładnika znaku podług woli odmienić, bylebyśmy tę samę odmianę czynili i w

funkcyi pod znakiem; chcąc n.p. wykładnika 2 zamienić na 4. 6. 8. i t. d. przez tę samą liczbę mnożąc zaraz wykładnika znaku pierwiastkowego i funkcyi; mam \sqrt{ax} , $\sqrt[4]{a^2x^2}$, $\sqrt[6]{a^3x^3}$, $\sqrt[8]{a^4x^4}$, i t. d. które toż samo znaczą; te bowiem funkcyje. podług wyższych wiadomości są równe.

$$a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{2}{4}}x^{\frac{2}{4}}, a^{\frac{3}{6}}x^{\frac{3}{6}}, a^{\frac{4}{8}}x^{\frac{4}{8}} \text{ ułamki zaś } \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

W rzeczy więc samej to pytanie na tem się kończy, żeby wykładniki ułamkowe odmienić na inne z odaleniem ich wartości: i przywiesź funkcyje $\sqrt{ax} + \sqrt[3]{yd} + \sqrt[m]{a^4z}$ do iednego wykładnika znaku; iest to iedno, co przywiesź wykładniki ułamkowe ilości do tego samego mianownika. A zatęm w funkcyi $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} +$

$$a^{\frac{4}{m}}z^{\frac{1}{m}} \text{ trzeba } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4+1}{m} \text{ przywiesź do iednego}$$

$$\text{mianownika } \frac{3m+2m+2+6}{6m}; \text{ więc } a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} +$$

$$a^{\frac{4}{m}}z^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{3m}{6m}}x^{\frac{3m}{6m}} + y^{\frac{2m}{6m}}d^{\frac{2m}{6m}} + a^{\frac{2+6}{6m}}z^{\frac{6}{6m}} = \sqrt[6m]{a^{3m}x^{3m} + y^{2m}d^{2m} + a^{2+6}z^6}.$$

Wynoszenie
do potęgi i wy-
ciąganie pier-
wiastków.

Działanie, któreśmy dopiero odbyli, potrzebuje mnożenia wykładników, mnożyć zaś wykładniki iakiey funkcyi iest to wynosić ią do potęgi, tak iak dzieląc wykładnika tęże funkcyi, iest to wyciągnąć z niej pierwiastek. Wszylkie funkcyje niewymiernę wyrażając się przez wykładniki ułamkowe podlegają podobnym prawidłom w tych dwóch działaniach, tak dalece; że stółując ię do ułamków przyzwoicie, w wynoszeniu do potęg przypadnie nam mnożyć liczników; w wyciąganiu zaś pierwiastków mianownika ułamku wykładnikowego. Aże w funkcyi niewymiernę, licznik iest wykładnikiem ilości, mianownik zaś wykładnikiem znaku pierwiastkowego, więc wynosząc

nósząc n. p. $\sqrt[3]{(x+a)}$ do potęgi m należy nam przez m mnożyć wykładnika ilości i wypadnie potęga m

$\sqrt[3]{(x+a)^m}$; wyciągając zaś pierwiastek potęgi m z funkcji $\sqrt[3]{(x+a)}$, przypada wykładnikowi znaku pierwiastkowego rozmnożyć przez m , co daje $\sqrt[m]{(x+a)}$

pierwiastek potęgi m funkcji $\sqrt[3]{(x+a)}$.

Chcąc mnożyć lub dzielić jedną ilość niewymierną przez drugą taką, mamy do czynienia z wykładnikami ułomkowymi, które tak iak w funkcjach wymiernych należy dodadź do siebie w pierwszym, odcignąć zaś w drugim działaniu u tych samych liter. Aże ułomków nie możemy dodawać ani odcignąć nie przywiódźmy ich do jednego mianownika, więc niżejli przytapiemy do mnożenia lub dzielenia funkcji niewymiernych, należy ie wprzód przywieść do tego

samęgo znaku pierwiastkowego; i tak $\sqrt[m]{a^n b^p}$,
 $\sqrt[m]{a^n b^p} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}}}$; to samo służy i na dzielenie n. p,

$\sqrt[m]{a^n b^p} : \sqrt[m]{a^r b^s} = a^{\frac{n}{m} - \frac{r}{m}} b^{\frac{p}{m} - \frac{s}{m}} = a^{\frac{n-r}{m}} b^{\frac{p-s}{m}} = \sqrt[m]{a^{n-r} b^{p-s}}$. Jeżeli zaś znaki zachodzą te

samę w mnożnikach, nie zostaje tylko rozmnożyć same ilości podłożywszy ich mnogości tenże sam znak. n. p. $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac} = \sqrt{a^2 bc} = a\sqrt{bc}$,

Skąd się wnosi że $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{a} \cdot -\sqrt{a} = -\sqrt{a^2} = -a$, to iest: że mnożąc dwie funkcye pierwiastkowe też samę przez się, wypadá w mnożeniu sama funkcya bez znaku pierwiastkowego, dodatna jeżeli znaki są też samę, odjemna, jeżeli są różne: co się także wyciągá z wzorów ogólnych uczyniwszy $qn=rm=qm$, $pq=sm=qm$.

F4

Fun-

 Mnożenie i
 Dzielenie.

Funkcye pierwiastkowe uroione wyraziłby się także powinny przez wykładniki ułomkowe. Ale że ich cecha zależy na znaku odjemnym położonym po znaku pierwiastkowym, który ma wykładnika parzystego, dla tego wynaleśdź nam potrzeba różnicę na to znaczenie: bo n.p. $\sqrt{-a}$ wyraziłby przez $-a^{\frac{1}{2}}$ mógłby kto znak odjemny przywiązać do znaku pierwiastkowego a nie do samej ilości, przez co by uroioną wziął za rzetelną. Zabieźemy temu przez znaczenie $(-a)^{\frac{1}{2}}$ gdzie już znak przed nawiasami należeć będzie do znaku pierwiastkowego, znak zaś pomiędzy nawiasami do samej ilości; a ponieważ $-a$ uważać się może iako $a \cdot -1$ przeto $(-a)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$.

$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$. wszystkie więc funkcye uroione znaczyć odtąd będziemy mogli tym sposobem n. p. $\sqrt{-3x} = \sqrt{3x} \sqrt{-1}$. Zaczem ponieważ w funkcjach uroionych dwoiakię znaki należy rozróżnić, jedne które należą do znaku pierwiastkowego, drugie które należą do samej ilości, trzeba w działaniu mieć wielką baczność na kombinacyą tych dwoiakich znaków, którą lubo dzieie się zgodnie do wszystkich prawideł znaków, prowadzi nas do wypadków na pozor zdawających się im sprzeciwiać.

Funkcye uroione są przypadkiem szczególnym funkcji niewymiernych: wszystkie więc prawidła któreśmy na te ostatnie znaleźli, służyć muszą i pierwszym. Mając zatem do mnożenia $\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-c}$, mamy w rzeczy samej $\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1}$ czyli $\sqrt{bc} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$; aże $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$; zaczem $\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{bc}$. podobnie $\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-c} = +\sqrt{bc}$, $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$, dwie więc funkcye uroione rozmnożone przez się, wydaia mnogość rzetelną.

Prawda ta tak oczywista, i ze wszystkiemi prawidłami działań zupełnie się zgadzająca nie powinna nikogo zadziwiać, uważając każdą funkcją uroioną iako wypadek ostatnich kombinacji rachunku, do którego nas przywiesdź może rozwiązanie iakiegokolwiek

zrównania

zrównania stopnia parzystego, Związek bowiem w zrównaniu mógł być prawdziwy, ale go stófuiać do pewnego przypadku stał się niepodobnym. Zdało mi się więc, że pierwiastki uroione są tylko przypadkami szczególnymi rozwiązania ogólnego, pokazującemi gdzie się, to rościagnąć nie może, iako niżej będziemy mieli tego dowody. Mnożąc więc dwie funkcyę przez się, wróćamy się do tych prawdziwych ogólniejszych kombinacyi s których powstały.

Zatrzymamy się ieszcze nad tem działaniem. Mnożąc $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ wypada za mnogość a^2+b^2 funkcyą rzetelną, $(a^2+b^2)(a+b\sqrt{-1})=a^3+ab^2+a^2b\sqrt{-1}+b^3\sqrt{-1}$ funkcyą uroioną; $(a^3+ab^2+a^2b\sqrt{-1}+b^3\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^4+2a^2b^2+b^4$ funkcyą znowu rzetelną; i t. d. Widziemy więc że mnogość s funkcyi uroionych nigdy nie może się stać rzetelną, tylko kiedy liczba mnożników uroionych jest parzystą.

Nauczysz się obchodzić z funkcyami niewymiérnemi w różnych zachodzących działaniach, wróćmy się do naszych uwag, i użyjmy dopiero wyłożonych na mnożenie prawideł: chcąc się doświadczeniem przekonać o tęg prawdziwie, któreysmy oczywistém rozumowaniem doszli to jest: że zrównanie drugiego stopnia zamykają koniecznie dwa pierwiastki, które przywiodłszy do zero, i rozmnożywszy przez się, otrzymamy to samo w mnogości zrównanie, które nam było do rozwiązania podane. Iakóż rządząc się prawidłami mnożenia.

$$\left(x + \frac{1}{2}A + \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - D\right)}\right)\left(x + \frac{1}{2}A - \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - D\right)}\right) = x^2 + Ax + D = 0.$$

Wszystkie więc zrównania 2go stopnia uważane być mogą iako zrost z dwóch zrównań 1go stopnia przez siebie rozmnożonych, których albo obydwia pierwiastki są rzetelne, albo obydwia uroione: każdy s takowych pierwiastków rozwiązuje iakie pytanie, albo daie odpowiedź inną na toż samo. Zaczem zrównanie 2go stopnia jest zawsze składem dwóch pytań

pytań proſtych oznaczonych przez dwa pierwiąſtki tegoż równania. Każde równanie 1go ſtopnia na które ſię równanie 2go rozbiérá, ieſt równe zero; więc wartość na x , s któregokolwiek z nich wyciągnioná i włożoná w równanie 2go ſtopnia przywieſdź ie powinna do zero, jako działanie każdego o tém przekona w teraźniejszy przykładzie. Preto każda wartość ilości nieznaney która włożona w równanie 2go ſtopnia przywieſdzie ie do zero, ieſt pierwiąſtkiem równania: takich zaś wartości nie może być więcej nad dwie. *Powtoré* znalazłszy innym iakim ſpoſobém ieden tylko pierwiąſtek, a rozdzieliwszy przezeń równanie 2go ſtopnia podane, otrzymamy pierwiąſtek drugi.

Niżeli roſciągniemy dalej teraźniejszyé uwagi, rozwiążmy ſobie ieſzcze iedno zadanie, które nas wprawi w używanie prawideł w tym Rozdziale wyłożonych.

Zadanie: „Mając dwie ſwiece nierownie ſwiatła, udzielające złączone przez linią proſtą, wynaleſdź, na téj linii mieyſce równie od obydwóch oſwiećone?„

Na rozwiazanie tego pytania przypuſcić nam tu potrzeba ieden początek optyczny, że iaſności forrzućane od ciał ſwiecących tak ſię mają do ſiebie, jako potęgi drugie wywrotne ich odległoſci: (*in ratione inverſa duplicata diſtantiarum*). Tak że ieżeli w odległoſci a iaſność ieſt równá c , w odległoſci x równá $\frac{ca^2}{x^2}$.

Chcąc teraz doyſdź ſwiatła każdej w ſzczegółnoſci ſwiecy, równac powinniſmy iaſność iedney i drugiey rzuconą w téyże ſamey odległoſci na iaką płazczyznę: poſóžmy więc że pierwſza ſwieca daie iaſność c w odległoſci a ; druga ſwiatłoſć d w téyże ſamey odległoſci; nazwáwſzy odległoſć dwóch ſwiec od ſiebie b , odległoſć pierwſzey ſwiecy od mieyſca którego ſzukamy x , będzie odległoſć drugiey od tegoż mieyſca $b-x$. Wypadá więc s początku optycznego że ſwieca pierwſza w odległoſci x będzie dawać

dać światła $\frac{ca^2}{x^2}$, drugą w odległości $b-x$, udzieli

światła $\frac{da^2}{(b-x)^2}$, a ponieważ podług warunku pytania obydwa te światła być powinny równe, idzie zatem że $\frac{ca^2}{x^2} = \frac{da^2}{(b-x)^2}$, zniósłszy ułamki i ro-

$$x^2 - \frac{2bc}{c-d} x = -\frac{cb^2}{c-d} \quad x^2 - \frac{2bc}{c-d} x + \frac{b^2c^2}{(c-d)^2} = \frac{b^2cd}{(c-d)^2}$$

$$x - \frac{bc}{c-d} = \pm \frac{b\sqrt{cd}}{c-d} \quad \text{czyli} \quad x = \frac{bc \pm b\sqrt{cd}}{c-d} \quad \text{odle-}$$

głość pierwszej świecy, $b-x = \frac{b(d \pm \sqrt{cd})}{c-d}$ od-
ległość drugiej świecy od miejsca równie oświeco-
nego.

Ponieważ x ma dwie wartości, przeto muszą być koniecznie dwa takowe miejsca. Roztrząśniemy teraz wszystkie przypadki w równaniu zawarte i ściągające się do różnych stopni światła, to jest kiedy $c > d$, powtóre kiedy $c < d$; na koniec kiedy $c = d$.

Co do pierwszego, jeżeli $c > d$, $c > \sqrt{cd}$, i $d < \sqrt{cd}$: pierwszą więc wartość na x , $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$ jest ilością dodatnią, ale że $(c+\sqrt{cd}) > (c-d)$, więc $\frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d} > b$,

dla tego miejsce to przypada aż za drugą świecą słab-
szą. Drugą odległość $b-x = \frac{b(c+\sqrt{cd})}{c-d}$ jest od-

jemną, więc przypada na przeciwną stronę podług te-
go cośmy mówili o ilościach odjemnych. Drugą wár-
tość na x jest $\frac{b(c-\sqrt{cd})}{c-d}$ jest także dodatnią, ale że

mniejszą

mniejszy od b , więc to miejsce przypada między dwiema świecami, i na ten czas druga odległość $b-x = \frac{b(\sqrt{cd}-d)}{c-d}$ jest dodatnią iako być powinna. Widze-

my więc że kiedy $c > d$, zadanie ma dwie odpowiedzi, a przeto są dwa takowe miejsca, z których jedno przypada między dwiema świecami, drugie za świecą słabszą. Dajmy n.p. że $c=4d$, $b=30$ stóp, więc $x=60$ stóp, $b-x=-30$ stóp na pierwszą odpowiedź; powtóre $x=20$ stóp, $b-x=10$ stóp na odpowiedź drugą, co się zupełnie zgadza z doświadczeniem

Przypuśćmy potem że $c < d$, $c < \sqrt{cd}$, $d > \sqrt{cd}$, w tym przypadku nic więcej nie czyniemy; tylko że przenosimy światło mocniejszy na miejsce słabszego, a słabsze na miejsce mocniejszego, zaczęm odpowiedź będą tę samą co i przedtem tylko słofownie do terażniejszych odmian.

Położmy na koniec obydwu światła równe to jest $c=d$; na ten czas $x = \frac{b(c+c)}{0}$; - - $b-x = \frac{b(d+d)}{0}$;

powtóre $x = \frac{0}{0}$, $b-x = \frac{0}{0}$; obydwie pierwsze wartości są równe ułomkom mającym za mianownika zero, czyli ilość nieskończenie małą; są więc nieskończenie wielkie. Coż to znaczy?

Tłómaczy się
znaczenie ilo-
ści nieskończe-
nie wielkiej, i
nieskończenie
małej, i wyra-
zu nieoznaczo-
nego $\frac{0}{0}$

Każdą ilość odmiennając się nie może tylko albo się powiększać albo zmniejszać. W pierwszym razie dorzucając ię ilekolwiek bądź podobnych ilości, wzrasta; ale nie przestaje nigdy być ilością skończoną; iędnakowóz wzrastając zawsze zbliża się co raz barzięj do pewnej granicy, którą my sobie wystawiamy w umyśle, abyśmy stófuując do ię iakiękolwiek bądź wielkości, mogli o ich wartościach sądzić: tą granicą jest ilość nieskończenie wielką którą się znaczy przez ∞ albo przez ∞ ; nie maż ię w naturze, w której wszystkie rzeczy są skończone, ale to jest tylko stworzeniem rozumu wymyśloném do mierzenia iakichkolwiek bądź wzrostów ilości.

Drugi

Drugi przymiot ilości to jest zmniejszanie się ciągle, potrzebowało podobnej granicy, do której ją odnioskując, moglibyśmy być w stanie sądzić o ich wartościach: taką granicą jest zero 0, czyli ilość nieskończenie mała która tak jak pierwsza nie ma istnienia tylko w naszym umyśle.

Każdą ilość wzrastając lub ubywając przybliża się do jednej z tych granic ale ię nigdy nie może dofiąć, boby tym sposobem z ilości rzetelnej stała się zmyśloną. Jeżeli się kiedy przytrafi że jaką wartość w zrównaniu zamieni się na $\frac{1}{\infty}$ albo na 0, znakiem jest, że w naturze takowy przypadek podług ściśłości geometrycznej nie ma miejsca, ale że ię mieć może w sposobie prawdy bliskim. n. p. przypuściwszy w naszym zadaniu $c=d$ znaleźliśmy na x i $b-x$ ilość nieskończoną: co nas uczy, że jedna z tych odległości nie może się znajdować w naturze; że na ten czas pytanie nasze nie należy do drugiego stopnia ale do 1go, iako nas zaraz początkowe uczy zrównanie. Jeżeli atoli nie będziemy brać rzeczy w najskrupulatniejfzcy ściśłości, drugie to miejsce mogłoby być oznaczone w tak wielkiej odległości, przed którąby pikiąć mogła odległość dwóch świec, co zawsze w naturze daie tylko wartość bliską prawdy. Każdą funkcją całką staie się nieskończenie wielką, kiedy który z ię terminów stanie się takim; nieskończenie zaś małą kiedy który z ię mnożników jest zero. Każdą zaś funkcją ułomkową staie się nieskończenie małą, kiedy ię licznik, kiedy zaś ię mianownik jest zero, staie się nieskończenie wielką, co wypada koniecznie z natury ułomków.

Miedzy dwiema granicami $\frac{1}{\infty}$, 0, zawarte są wszystkie ilości skończone i rzetelne, które pokazują się w rachunku pod znakiem \circ , jeżeli w ostatnie wypadki wprowadziliśmy jaką kondycją do której rachunek nasz nie należy. Znak więc \circ uczy nas, że rzecz

F który

której szukamy jest podobna, że ma wartość skończoną, ale że te ostateczne wypadki nie mogą być naznaczone, a zatem należy się aż do początkowego wrócić zrównania, i wprowadzić w nie ten warunek nowy, który zapewne coś w zrównaniu odmienniejszy, odkryje nam dokładnie to czego szukamy. I tak w teraźniejszym przykładzie wprowadziliśmy do ostatecznego zrównania $c=d$, kondycją którą zniża zrównanie do pierwszego stopnia i daje nam $b=2x$, czyli $x=\frac{b}{2}$,

to jest: że w tym przypadku jedno jest tylko takowe miejsce w samym środku odległości dwóch świec od siebie: szukając tej odległości w zrównaniu 2go stopnia gdzie już jedna wartość stała się nieskończoną, i kombinując to miejsce niepodobne z podobnym, nie mogliśmy zaiste nic wyciągnąć oznaczonego w takowej kombinacji, o czem nas sam rachunek przestrzegł.

Jeżeli ilość iaką przeszedłszy za granicę ostateczną swego wzrostu lub ubywania zaczyna znowu brać wartości iakie, te nie mogą być tylko nieskończone uważając je w takim względzie iak przedtem, i na ten czas wypadają różne porządki ilości nieskończonych, które Matematyka wyższa rozstrząsa: jeżeli zaś te wartości są skończone nie mogą one znajdować się w tym stanie i względzie, w jakim były przedtem: bo już skończyły zupełnie swój bieg dawny i swoje nawet miarę stółonku; nie mogły one więc pokazać się tylko innemi od tego, czem były przedtem; to bowiem przejście nic innego nie znaczy, tylko że wzrosty lub ubywania ilości w tym względzie są niepodobnemi, ale podobnemi w względzie innym. Jeżeli więc ilość iaką była dodatnią, a w tym stanie stała się dla pewnej wartości $\frac{1}{2}$ albo 0; rosnąc znowu potem stała się ujemną albo z ujemnej dodatnią, i dla tegoć to podobno ilości ujemne nazwano MNIEYSZEMI OD NI-

CZEGO

czego (*minores nihil*); nazwisko bardzo szczególne, które tu dopiero może być objaśnione.

Jeżeli więc niektórzy Autorowie wyrywają się zaraz z niem przy wstępie, możemy s teraźniejszy i przeszłych uwag rozsądzić iak mało znają teorią ilości dodatnych i odiemnych. Oprócz wielkiej nieprzyzwoitości przez którą uczących się wprowadzają w ciemne i dziwaczne rzeczy opisywanie, błądzą przeciwko prawom geometrycznym dając nazwisko powszechne bardzo szczególnemu przypadkowi, i wprowadzając niezrozumiany język w tę naukę, która s swęj natury iest stolicą iasności i przekonania. Staraliśmy się wrazić nągłębiej w umysł i pamięć teraźniejszy uwagi, bo ony służyć nam będą do iasnego zrozumienia wyższych Matematycznych nauk, których są najpierwszym gruntem.

S tego tłómaczenia spyta się nie ieden, iak rozróżnić wypadki pokazujące nam pierwiastki uroione w zrównaniu, od tych które nas przyprowadzają do $\frac{1}{2}$ albo do a ; ale na to dosyć mu zrozumieć dobrze opisanie dwóch tych rzeczy, a przyzna że inną iest rzecz, kiedy iaką odpowiedź staie się dla pewnego warunku wcale niepodobną, a inną znówu kiedy odpowiedź iest niepodobną dla pewnej kombinacyi od którey nie zależy. Ale pierwiastki uroione będą ieszcze miały rozleglejsze znaczenie niżey.

§. XVII.

Przykłady któreśmy sobie obrali dla doświadczenia wypadki poprzedzających uwag i prawidła zrównania 2go stopnia dają nam poznać, że wypadki Algebraiczne nie tylko nam odkrywają prawdziwą wartość ilości nieznaney, ale nawet i stan iey w którym się względem innych znajduje i do którego należy odpowiedź pytania podług wiadomości o funkcyach dodatnych i odiemnych wyżej wyłożony. Kiedy więc nadajemy znaczenia rzeczom w pytaniu zawartym nie należy nam sie troszczyć czyliśmy ie przywołitym znakiem nacechowali lub nie?

ostatnie bowiem wypadki nauczają nas tego; jeżeli w nich ilość nieznaną wypadła z tym samym znakiem któryśmy tę na początku pytania nadali, pokazując że nasze cechowanie było dobre; jeżeli zaś wypadnie ze znakiem przeciwnym, ostrzega nas, że to cośmy wzięte w pewnym względzie, powinno być być wzięte w względzie przeciwnym. Rachunek więc Algebraiczny sam nawet błędy znaczenia poprawia.

Zachodzi nam tu jedno pytanie: czyli prawidła podane na rozwiązanie równań 2go stopnia nie mogą być rościagnione do stopni wyższych? To pytanie stółować można do dwóch przypadków, albo kiedy równania wyższych stopni zamykają tylko pewne terminy iakowe podobieństwo mające z temi, które w drugim stopniu zachodzą, albo kiedy równania zamykają wszystkie terminy swych stopni, lub niektóre niemogące się zrównać z terminami 2go stopnia. Wnieście sobie każdy że tu nie rozumiem innych terminów tylko te które zamykają ilość nieznaną, bo cała uwaga nasza na te tylko terminy w rozwiązywaniu równań być powinna obrócić. Co do pierwszego przypadku: ponieważ równanie 2go stopnia powstające z funkcji dwó-kształtnej zawiera terminy $x^2 + Ax$, gdzie wykładnik 2go terminu jest potęgą wykładnika 1go; więc jeżeli iakiegokolwiek równanie będzie zamykało w dwóch terminach ilość nieznaną tak, że wykładnik 2go terminu będzie potęgą wykładnika 1go, te same reguły które nam tu służyły, będą jeszcze mogły być użyte na rozwiązanie takowych równań. Dajmy n.p. że mamy równanie $x^{2m} + Ax^m + D = 0$, gdzie m jest iakąkolwiek liczbą, to zapewne rozwiązać się może sposobem 2go stopnia;

uczyniwszy bowiem $x^m = y$, a zatem $x = \sqrt[m]{y}$, równanie naprzód podane, odmieni się na równanie 2go stopnia $y^2 + Ay + D = 0$, które rozwiążwszy, wyndziemy $y = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - D}$

$$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - D}}.$$

Jeżeli

Jeżeli zaś zrównania wyższych stopni nie będą miały kondycyi dopiero wyłożoné; na ten czas prawdziwa 2go stopnia nie będą mogły być na ich rozwiązanie użyte. Uciekając się do własności potęg, które nas także przywiodły do prawideł na drugi stopień, potrzebaby naśmprzód aby współ-czynniki wszystkie ilości nieznane, miały takowe wartości iakich każda w szczególności potęga wyciąga; inaczej nie udałoby nam się wyciąganie z nich pierwiastków. Ale ktokolwiek zatrzyma się nad temi warunkami, pozna, że takowym sposobem uszczególniamy barzo teorię zrównań, przywiązując ich terminy do tych a nie innych wartości. Reguły na takowe szczególne przypadki nie posunęłybycale granic nauki, która swój szacunek zabiera od ogólności początków. Trzebaby przeto wpuścić myśl naszą w głębsze i rozległysz badania, do których nas samo tylko doskonałsze poznanie zrównań wyższych stopni może przyprowadzić. Usiłujemy więc poznać lepiej własności zrównań iakichkolwiek stopni, w których może nam nie będzie trudno upatrzeć reguły na ich rozwiązanie. Ale iakąż drogą przyjdziemy do tego poznania? Zbierzmy krótko naśmprzód treść całej nauki tego Rozdziału, a może w nim znajdziemy łańcuch myśli, za którym nam iść będzie potrzeba.

Zrównania z eliminacyi wypadły przywiodły nas do zrównania 2go stopnia; te znowu pokazały nam funkcye sobie podobne, któreśmy nazwali dwó-kształtnemi dla dwoiakich wartości ich znaków. Mamy więc każdemu rodzajowi zrównań odpowiadający rodzaj podobny funkcyi, a tamte przywiodły nas zawsze do tych, i do działań im właściwych. I lubo w iakiemkolwiek zadaniu funkcyę poprzedzać musi zrównanie podług różnicy między niemi uczynioné w §. 1; że jednak przez związek myśli postępujemy do prawdziwego poznawania, idzie zatem, że od zrównania przyiść musi rozum ludzki do własności funkcyi, rostrząsając zbiór myśli i warunków,

F3

które

Treść nauki
w całym Ro-
zdziale.

które w tém związku porównań. Funkcyę dwóchkształtnę odkryły nam swoje pierwiastki; mamy więc pierwiastki funkcyi i pierwiastki równań: a iako pierwszą potęgą jest pierwiastkiem innych wyższych w funkcyi iakięs nieznanę ilości; tak równanie 1go stopnia uważać się może iako pierwiastek wyższych równań, lubo w innym względzie, bo tam zważają się pierwiastki co do ilości w funkcyi jednokształtną wchodzących, które zawsze bydź powinny té same; tu zaś co do związku który może różny lub tenże sam zachodzić w pierwiastkach równań.

Przybliżyliśmy bowiem przez oczywiste barzo początki do téj gruntowéj prawdy, że równania 2go stopnia uważać się powinny iako złożone z dwóch równań 1go; té same początki służą nam do przekonania się że równania 3go, 4go, i t. d. stopnia zważane bydź mogą iako powstające z trzech, czterech, i jednem słowem z tylu równań pierwszego stopnia, itę ilość nieznaną má jedności w najwyższym wykładniku. Jeżeli ten wniosek zdaie nam się za nagły, przyjdziemy potem do niego przez inne początki. Nie możemy go atoli nie użyć do odkrycia własności równań iakiégokolwiek stopnia. A naprzód jeżeli potęgą drugą funkcyi przywiodła nas do wzoru ogólnego równań 2go stopnia; potęgi także wyższe odkryją nam podobne wzory do wyższych równań, dofyć nam bowiem upowszechnić współczynniki ilości nieznanę w każdym terminie, i termin ostatni, to jest rościagnąć ie do iakichkolwiek ilości znanych, i wprowadzić w funkcyę związek; a natychmiast Tablica §. 11. nauczy nas o wzorze przywiązanym do równań każdego stopnia.

RO-

ROZDZIAŁ TRZECI.

Nowy Sposób uważania Zrównań dostrzeżony w poprzedzających wiadomościach daie nam barzięć poznawać sztukę i moc RACHUNKU, za któręć pomocą odkrywaią się OGÓLNE WŁASNOŚCI ZRÓWNAŃ JAKIEGOKOLWIEK STOPNIA: pokazuią się wzajemne pomocy spływaiące s teoryi Zrównań na Funkcye, i s teoryi funkcyi na Zrównania.

§. XVIII.

Uczyamy tu nasámpieżód potrzebną uwágę nad postępkim naszęć rozumowania. W poprzedzających dwóch rozdziałach szliśmy od zrównania do pierwiastków, dla tego, że tam iedno pytanie rzuciło tylę światła w naszę badaniá, żeśmy nie mieli trudności poiąć naturę zrównania i funkcyi, s któręć opisu wypadły nam różne własności zrównań 1go i 2go stopnia. Té ostatnie atoli potrzebowały iuż znaczney pomocy rachunku dla tego, że kombinacye w nich zawarte iuż są barzięć zawięćane. Im do wyższych postapiemy stopni, tém się zapuszczemy w delikatnięćsze i cięćższe stóćsonki, pod któręć liczbą upadłaby myśl nasza, gdyby nie była wspartá pomocą rachunku, i wiadomości iuż nabytych. Aże dochoćdzemy zawięćze rzeczy nieznanęć przez znanęć; kaćżda walná prawda dostrzeżoná, iest dla nas nowá, drogá do innęćch odległęćszych. Zrównania 2go stopnia pokazały nam oczywiscie, że zrównania 1go stopnia wchodzą za pierwiastki w wszystkie innęć. Szukać więc bęćdziemy własności zrównań wyższych stopni za pomocą piérwszęćgo; i poydziemy teráz od pierwiastków do zrównań. W tym postępku pomoćzemy

Uwági Loic-
czne objaśnia-
iáć sposób my-
ślenia przez
rachunek.

niezmiernie naszym myślom, bo rachunek oszczędzi nam wiele kombinacyi, których mnogość ucinęłaby niezmiernie naszą myśl. Całe więc myślenie do zrównań 1go stopnia i jego działań przywiązane odpadnie nam, a uwaga nasza nie będzie miała do rostrząśnienia iak tylko nowe prawdy, które s. tąd wypadną. Owóż cała Metafizyka myślenia przez rachunek! w nim naginamy badania nasze do sił rozumu, i uśłuniemy rozumowania nasze przywiesdz do iak nymniejszy liczby: wszystkie zbyt odległe i zawarte w posłtkach odpadają od naszej uwagi i zamieniają się w formuły i mechanizm, a same tylko istotne zostają się przy umyśle, aby swobodniejszy przez ten sposób, mógł prędzcy i dokładnię postrzegać nowe prawdy, które z rachunku wypadają. Teraz n. p. użyjemy różnych działań i własności zrównań 1go stopnia, ale te wszystkie kombinacye które do tych działań i zrównań są przywiązane, są nam teraz niepotrzebne. Gdybyśmy ie byli obowiązanii mieć przytomne w umyśle, mnogość myśli zmniejszałaby naszą attencyą nie pozwoliwszy nam daley przeniknąć. Rachunek więc nie tłum rozumowania, ale nam ię bydz może oszczędza tego, któreśmy iuz raz uczynili, a które ciężąc na uwadze, tamowałyby dalsze postępowanie nasze do prawdy. Nie możemy nie uznać iak ta ekonomia iest nieodbicie naszym myślom potrzebna, bez której tyle innych nauk ulgnawszy na pierwszych dostzeżeniach i pewnych szczególnych prawdach, nie mogą się wynieść do innych zawiakleyszych.

§. XIX.

Nie oddalámy się od tego na czymśmy stanęli. Przedsięwzięliśmy dochodzić własności zrównań wyższych iakichkolwiek stopni przez składanie ich z zrównań stopnia pierwszego; wziąwszy więc kilka zrównań 1go stopnia $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, $x - d = 0$, $x - e = 0$, których wszystkie pierwiastki są dodatne; powtóre:

powtóre: $x+a=0$, $x+b=0$, $x+c=0$, $x+d=0$, $x+e=0$,
i t.d. w których wszystkie pierwiastki są odjemne, a
rozmnożywszy ich trzy, cztery, i t. d. przez się wy-
padnie z

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0 \text{ czyli:}$$

$$x^3 - a.x^2 + ab.x - abc = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} +ac \\ +bc \end{array} \right\}$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0.$$

$$x^4 - a.x^3 + ab.x^2 - abc.x + abcd = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} -b \\ -c \\ -d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} +ac \\ +ad \\ +bc \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -abd \\ -acd \\ -bcd \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} +bd \\ +cd \end{array} \right\}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=0 \text{ czyli:}$$

$$x^3 + a.x^2 + ab.x + abc = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} +b \\ +c \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} +ac \\ +bc \end{array} \right\}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=0,$$

$$x^4 + a.x^3 + ab.x^2 + abc.x + abcd = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} +b \\ +c \\ +d \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} +ac \\ +ad \\ +bc \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} +abc \\ +acd \\ +bcd \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} +bd \\ +cd \end{array} \right\}$$

Zatrzymawszy się uwagą nad temi przykładami wy-
ciągniemy z nich następujące prawdy:

Naprzód: Każdą z ilości znanych a, b, c, d , będąc
wartością nieznaney x , jest pierwiastkiem równania,
włożywszy ją w równanie z tego mnożenia powsta-
jące zniebie wszystkie terminy i przywiedzie całe zrów-
wnanie do zero. Własność więc ta pierwiastków
dowodzoną w dwóch poprzedzających stopniach, ma
miejsce we wszystkich stopniach wyższych.

Powtóre: Rozstrząsając współ-czynniki ilości niezna-

F5

ney

Wykłada się
własności ogól-
ne równań i
kiegokolwiek
stopnia.

Właściwości
współ-czynni-
ków,

nę we wszystkich tych terminach zrównań, znajdziemy: że współ-czynnik drugiego terminu jest równy summie wszystkich pierwiastków z znakiem przeciwnym wziętych. Współ-czynnik trzeciego terminu równy summie mnogości różnych, które powstają z pierwiastków po dwa na raz mnożonych: Współ-czynnik czwartego terminu równy summie mnogości różnych s trzech na raz pierwiastków; piątego terminu summie mnogości s czterech na raz pierwiastków i t. d. nakoniec ostatni termin równy jest mnogości ze wszystkich pierwiastków przez siebie rozmnożonych. Jeżeli więc w jakimkolwiek zrównaniu brakuje drugiego terminu, ten nie mógł zniknąć inaczej, tylko że summa wszystkich pierwiastków stała się zero; to jest: że w niem znajdują się pierwiastki dodatnie i odjemne, i że summa dodatnich jest równa summie odjemnych: jeżeli brakuje trzeciego terminu, musi koniecznie w takim zrównaniu summa mnogości dodatnich z dwóch na raz pierwiastków, być równą summie odjemnych: podobnie należy sądzić o innych terminach. Ale jeżeli ostatni termin w jakim zrównaniu brakuje, nie mógł ten inaczej zniknąć, tylko że jeden s pierwiastków zrównania stał się zero; i na ten czas zrównanie rozdzielić się całe może przez x , i zniżyć o jeden stopień.

Potrzenie: Mając do rozwiązania iakiegokolwiek stopnia zrównanie s pewnemi oznaczonemi współ-czynnikami n.p. $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$ (A). dosyćby nam było porównać jego współ-czynniki s współ-czynnikami iednego s terażniejszych zrównań które mu odpowiada w tymże samym stopniu, to jest z. zrównaniem.

$$\begin{array}{r} x^3 - a \\ -b \\ -c \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x^2 + ab \\ +ac \\ +bc \end{array} \right\} x - abc = 0 \quad (B).$$

a gdybyśmy potrafili wynaleść a , b , c , w liczbach, które wchodzi w zrównanie (A) mielibyśmy tym sposobem właściwe pierwiastki zrównania (A). Doświadczmy

świadczy tego przez rachunek. Równając współczynniki podobnych terminów równań (A), (B), otrzymamy $a+b+c=8$, $ab+ac+bc=7$, $abc=9$, trzy równania na tyleż nieznanach a, b, c . Ponieważ każde z tych równań zamyka wszystkie nieznané, nie możemy przystąpić do rozwiązania ich, póki ich przez eliminacyą nie przerobiemy na inne trzy, z którychby w każdym nieznaydowała się tylko jedna z tych nieznaných. Działając podług §§. 8. i 14. wynaydziemy te trzy równania.

$$\text{na } a \dots a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0. \text{ na } b \dots b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0.$$

$$\text{na } c \dots c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0.$$

Widzemy że wszystkie te trzy równania są jednakie; a ponieważ nie braliśmy pierwiastków a, b, c , za równe; więc trzy te równania nie dadzą nam tylko trzy pierwiastki różne, z których jeden będzie wartością a , drugi wartością b , a trzeci wartością c . Te trzy równania powstały z równania (A), i pokazały się w tym samym wyrazie co i tamto; więc wartość ilości nieznaney w równaniu (A), będzie takąż samą i tychże samych ilości znanych funkcją co i w tych ostatnich. Przeto jeżeli te trzy równania mają trzy pierwiastki, równanie (A) tyleż ich mieć musi, co nam oczywiście dowodzi, że równanie 3go stopnia, ma koniecznie trzy pierwiastki; że na wynalezienie tych trzech pierwiastków, rozwiązać nam koniecznie potrzeba równanie 3go stopnia, i że nakoniec przyszedłszy do tego rozwiązania, jedną którekolwiek z trzech ostatnich równań odkryje nam wszystkie te trzy pierwiastki. Na nic by nam się bowiem nie zdało rozwiązywać je wszystkie, kiedy w dziewięciu pierwiastkach nie byłoby tylko trzy różne, których szukamy, a które wypadną z jednego któregośkolwiek.

Jeżeli weźmiemy równanie 4go stopnia z współczynniki oznaczonemi, przyidziemy tą samą drogą do téj prawdy; że ono zamyka cztery pierwiastki.

F6

Nie

Nie możemy już więc wątpić o tem, że każde zrównanie iakiegokolwiek stopnia tyle zamyka w sobie pierwiastków, ile najwyższy wykładnik ilości nieznaney ma w sobie iedności. Aże zrównanie nie tylko zamykać może pierwiastki rzetelne ale i uroione; pierwiastki zaś uroione nie znoszą się tylko kiedy są w liczbie parzystey, zaczęm każde zrównanie iakiegokolwiek stopnia pod wyrazem rzetelnym, jeżeli ma w sobie pierwiastki uroione, liczba ich bydz musi parzysta: i tak zrównanie 3go stopnia musi mieć koniecznie albo wszystkie trzy pierwiastki rzetelne, albo ieden rzetelny, a dwa uroione. Zrównanie czwartego stopnia może mieć albo wszystkie cztery pierwiastki rzetelne, albo wszystkie uroione, albo dwa rzetelne a dwa uroione: podobnie naleczy twierdzić o innych.

Właściwości zrównań co do znaków.

Poczwarte: Przypatrzylszy się układowi znaków w zrównaniach z mnożenia powstających, dostrzeżemy, że w tych gdzie wszystkie pierwiastki są dodatne znaki idą na przemian, to iest we wszystkich terminach liczby nieparzystey są dodatne, w terminach zaś liczby parzystey, odienne; gdzie zaś pierwiastki wszystkie są odienne, tam też same znaki ciągle następują: w naszych przykładach wypadły wszystkie dodatne, ale gdybyśmy byli wzięli zrównania 1go stopnia pod wyrazem $-x-a=0$, otrzymalibyśmy byli wszystkie odienne, w zrównaniach stopni nieparzystych. Stęy uwagi nad znakami wniósł *Des-Cartes*, że w zrównaniu przemiana znaków oznaczają pierwiastki dodatne, ich zaś następstwo pierwiastki odienne, tak dalece, że w zrównaniu n. p. $x^4-13x^3+11x^2+253x-252=0$ bydzby powinno podobny tęy uwagi trzy pierwiastki dodatne a ieden odienmy. Pamiętajmy iednak, że zrównania s których tę uwagę wyciągamy, mają wszystkie pierwiastki rzetelne: możeż ona bydz rosciagnioną do zrównań mających pierwiastki uroione?

Rozmnóżmy przez się te trzy zrównania:

$$(x+\sqrt{-3})$$

$(x+\sqrt{-3})(x-\sqrt{-3})(x-6)=0$ otrzymamy: $x^3-6x^2+3x-18=0$. Powtóre $(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2})(x+3)=0$ otrzymamy $x^3+3x^2+2x+6=0$.

układ znaków w pierwszym równaniu pokazuje wszystkie trzy pierwiastki dodatnie, w drugim zaś wszystkie odjemne; lubo w pierwszym jeden tylko jest dodatni a dwa urojone, w drugim dwa urojone, a jeden odjemny; widzemy więc oczywiście, że reguła Des-Carta na rozpoznanie pierwiastków dodatnich i odjemnych nie służy równaniom mającym pierwiastki urojone. Wnieśliśmy s tąd, że mając podane sobie jakiekolwiek równanie a chcąc wiedzieć, jeżeli to zamyka pierwiastki urojone, porachowawszy z układu znaków liczbę pierwiastków dodatnich i odjemnych, rozmnożyć je potrzeba przez równanie iakie tego stopnia; jeżeli w mnogości pokaże się pierwiastek przybyły z nowego równania, zupełnie się zgadzający z liczbą ich pierwszą; równanie to będzie miało pierwiastki rzetelne, inaczej wnieść należy pierwiastki urojone; ale ta reguła nie prawdzi się tylko w pewnych przykładach, i dla tego że ta własność równań nie jest ogólną wszystkim, nie mamy przyczyny nad nią się długo zastanawiać. Przydadymy atoli jeszcze do niej jedną uwagę: że kiedy w równaniu iakiem brakuje którego terminu, kładąc na jego miejsce $+0$, albo -0 , zawsze wypadnie ta sama liczba pierwiastków dodatnich lub odjemnych z układu znaków, jeżeli równanie ma wszystkie pierwiastki rzetelne; wypadnie zaś inną liczba na $+a$, inną na $-a$, jeżeli ma pierwiastki urojone.

§. XX.

Wszystkie uwagi wyższe oczywiście nas przekonują że równanie iakiegokolwiek stopnia m , zamyka się w tym wyrazie ogólnym.

$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \text{i t. d.} + k = 0$. (C).
gdzie p, q, r, s, k , są ilościami znanymi. Rozwiązać iakowe równanie jest to jedno, co wynaleźć liczbę m wartości

Rozwiązanie
równań wyż-
szych stopni
zamyka wży-
ście równa-
nia stopni niż-
szych.

in wartości na x w funkcyach p, q, r, k, i t. d. s którychby każda włożona za x w zrównanie podane, zniósła wszystkie w niem terminy i przywiodła je do zera. Rozwiązanie to stosowne do natury umiejętności, powinno być tak ogólne, aby służyło wszystkim szczególnym przypadkom, które tylko rodzić się mogą przez wprowadzenie iakiegokolwiek warunku w zrównanie. Dajmy więc że rozwiązawszy zrównanie (C) tak ogólnym sposobem, uczyniemy w niem $k=a$, w tem przypuszczeniu prawidła użyte ieszcze te same służyć powinny, ale na ten czas zrównanie będzie całe podzielne przez x i odmieni się na $x^{m-1}+px^{m-2}+qx^{m-3}+rx^{m-4}+i$ t. d. $+i=0$ (D).

Zrównanie stopnia $m-1$, które nie może się rozwiązać, tylko przez prawidła właściwe stopniowi $m-1$. Aże zrównanie (D) wypadło s przypadku szczególnego zrównania (C), który w rozwiązaniu powinien być być ogarniony, jeżeli to było tak ogólne iakęśmy mówili, i iak sama natura umiejętności wyciąga; więc rozwiązanie zrównania stopnia $m-1$, iest zawarte w stopniu m . To rozwiązanie stopnia $m-1$ lubo będzie szczególnym przypadkiem stopnia m , będzie jednak co do swego stopnia w samym sobie zważanego tak ogólne iak pierwsze, a zatem ogarniać znówu powinno wszystkie szczególne przypadki mogące być wprowadzone w zrównanie (D): jeżeli w niem uczyniemy $i=0$, ieszcze prawidła stopnia $m-1$ będą służyć te same w takowej odmianie. Ale w tem przypuszczeniu zrównanie (D) będzie podzielne przez x , i zamieni się na:

$$x^{m-2}+px^{m-3}+qx^{m-4}+rx^{m-5}+i \text{ t. d. } +h=0 \quad (E).$$

to zrównanie iest stopnia $m-2$, na którego rozwiązanie trzeba prawideł temu stopniowi właściwych. Te prawidła wypadną s tych które zrównaniu stopnia $m-1$ służyły, a zatem rozwiązanie stopnia $m-2$ zawarte iest w stopniu $m-1$ a tem samem w stopniu m . Jeżeli ieszcze w zrównaniu (E) uczyniemy $h=0$,

otrzy-

otrzymamy zrównanie znowu rozdzielne przez x , po którym rozdzieleniu wypadnie

$$x^{m-3} + px^{m-4} + qx^{m-5} + rx^{m-6} + \dots + g = 0. \quad (F)$$

To zrównanie będąc stopnia $m-3$ nie będzie się mogło rozwiązać tylko sposobem temu stopniowi służącym; który że znowu jest przypadkiem szczególnym stopnia $m-2$, lubo sam w sobie i w porównaniu niższych stopni będzie barzo ogólnym; zaczęm rozwiązanie stopnia $m-3$, zawarte jest w stopniu $m-2$, té obydwu w stopniu $m-1$, a wszystkie razem w stopniu m . S tąd nam wypada ta wielka prawda: że rozwiązanie ogólne zrównania iakiegokolwiek stopnia, zamyka w sobie rozwiązanie wszystkich stopni niższych; aże każdy stopień má sobie właściwe pierwiastki nacechowane w ilościach znanych przyzwoitym sobie znakiem, rozwiązanie to w swym pierwiastku zamykać musi znaki pierwiastkowe wszystkich stopni niższych. Pokáže nam się ta prawda w drugim stopniu, jeżeli w iego pierwiastkach uczyniemy ostatni termin zrównania zero, ieden nam bowiem pierwiastek zniknie, a drugi da rozwiązanie pierwszemu stopniowi służące.

Gdybyśmy więc mieli sposób na rozwiązanie stopnia m , mielibyśmy przez to prawidła na wszystkie zrównania, i Algebra dosięgłaby szczytu swéj doskonałości. Ale ieszcze niezmiernie jesteśmy od tego oddaleni. Niżeli przyjdziemy do poznania granic naszej nauki, obróćmy wprzód uwagę na siebie, iakieśmy daleko w naszych dociekaniach dotąd postąpili. Cała nasza sztuka rozwiązywania zrównań skończyła się na drugim stopniu, chcąc dosięc stopni wyższych, potrzebaby nam każdy przywiesić do tych, s które mi umiemy się obchodzić: albo na każdy w szczególności wynaydować prawidła i sposoby z wiadomości dotąd nabytych. Doświadczmy ieszcze niektórych, które nam poznane dotąd własności zrównań poddać mogą.

§. XXI.

Właściwość ostatniego terminu zamykającego sposób na rozwiązanie.

Powiedzieliśmy byli, że ostatni termin równania iakiegokolwiek, jest mnogością ze wszystkich pierwiastków, więc rozebrawszy go na mnożniki, moglibyśmy pomiędzy niemi odkryć te, które są pierwiastkami równania: kładąc bowiem każdy z takowych mnożników za x w równanie, ten któryby go przywiodł do zero, byłby jego pierwiastkiem. Ten sposób rozwiązania równań byłby zaiście powszechny na wszystkie iakiegokolwiek stopnia, gdybyśmy byli w stanie rozebrania iakiejkolwiek liczby na swych mnożników. Ale że nasze wiadomości Arytmetyki nie rościągają się jeszcze tak daleko: mamy liczby niewymierné i *piérwsze* (a) w których takowy sposób rzadkoby się udał. Może on być użyty, ale tylko prawie w samych równaniach mających pierwiastki wymiérne. I w tych nawet ma swoje nieprzyzwoitości: każdego bowiem mnożnika należy doświadczać dwa razy, to jest biorąc go dodatnie i odjemnie, czyli ten przywiedzie równanie do zero. lub nie? Niechże liczba iaką rozbierze się na barzo wiele mnożników, działanie przypadnie pracowite a często bezskuteczne. Jeżeli jeszcze do mnożników całkich przydamy ułomkowe, liczba ich może być bez końca, i na ten czas kufzenia nasze ledwo być mogą kiedy szczęśliwe. Chąc zatem użyć tego sposobu w iakiem równaniu, należy się wprzód upewnić czyli to zamykają pierwiastki ułomkowe lub nie? Nad to zaś nic łatwiejszego, bo jeżeli najwyższą potęgą ilości nieznaney jest bez współ-czynnika liczebnego, a przytém wszystkich innych terminów współ-czynniki całkie; Arytmetyka sama nas uczy, że pierwiastek takowego równania nie może być ułomkowy, bo gdyby był takim, nie mógłby być mianownik zniknąć tylko stawszy się wszystkim terminom powszechny, a zatem najwyższą potęgą ilości nieznaney byłaby była przez iaką liczbę rozmnożoną. Wszakże

tén

(4) Liczby *piérwsze* nazywają się w Arytmetyce, które nie mają innych dzielników prócz siebie samych i jedności.

ten mianownik który służy x , musi być odmiennym w x^2 w x^3 i t. d. Prawda: że równania mające współ-czynniki ułomkowe, przerobić się łatwo mogą na inne współ-czynniki całkich: wzięwszy bowiem za ilość nieznaną, inną rozdzieloną przez jaką liczbę, i włożywszy ją w równanie, wszystkie współ-czyniki staną się całkami, n. p. niech będzie równanie.

$$x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{d}{e} = 0, \text{ kładąc za } x, \frac{y}{m}, \text{ przerobiemy}$$

$$\text{równanie podane na } \frac{y^3}{m^3} + \frac{ay^2}{bm^2} + \frac{by}{cm} + \frac{d}{e} = 0$$

$$\text{czyli } y^3 + \frac{am}{b}y^2 + \frac{bm^2}{c}y + \frac{dm^3}{e} = 0. \text{ jeżeli więc } m$$

jest rozdzielne razem przez b, c, e ; współ-czynniki

$$\frac{am}{b}, \frac{bm^2}{c}, \frac{dm^3}{e} \text{ będą całkami: a choćby nawet}$$

b, c, e , były liczbami pierwszymi, wzięwszy $m = bce$ wszystkie terminy staną się rozdzielne: w przypadku zaś gdy b, c, e , nie są pierwszymi, m może być liczbą małą, która zadość uczyni pytaniu.

Widzimy więc, że rozwiązanie równań mających pierwiastki wymierne, zawiśło od rozbioru ostatniego terminu na swoje mnożniki całkie; to pytanie co do niektórych szczególnych przypadków rozwiązuje Arytmetyka. Nie chcemy go tu powtarzać, bo na-przód mało wchodzi w nasz zamiar; oprócz tego ten sposób nadto jest ograniczony i nadto pracowity, abyśmy się nad nim zastanawiać mieli; wolęmy raczej zostawić uwagę naszą ogólniejszym w tej materii badaniom. Objaśnimy go jednak choć w jednym przykładzie: Niech będzie do rozwiązania równanie 3go stopnia $x^3 - 17x^2 + 79x - 63 = 0$, ostatni termin ma za dzielników liczby 1, 3, 7, 9, 21, 63, z których 1, 7, 9, włożone za x , przywodzą równanie do zero, więc $x=1, x=7, x=9$, są pierwiastkami równania

wnania podanego. Gdyby liczba jaką zamykała nie-
skończoną nawet liczbę mnożników; między temi ty-
le tylko być musi takich, które przywodzą zrówna-
nie do zero, ile wykładnik stopnia ma w sobie iedno-
ści. Gdybyśmy przez kaszenia nasze choć przynay-
mnię jeden tylko wynaleźli pierwiastek, zyskujemy
jeszcze i tak na naszę pracy; bo rozdzieliwszy przezeń
zrównanie, zniżamy je o jeden stopień; mając dwa
pierwiastki, i rozdzieliwszy przez nie zrównanie, zni-
żemy je o dwa stopnie, a tak m. p. od 3go stopnia
przydziemy do 2go lub do pierwszego, które umie-
my rozwiązać.

§. XXII.

Wyrzucenie
terminu iakie-
gokolwiek w
zrównaniu,

Mówiąc o zrównaniach 2go stopnia widzieliśmy, że
te prawidła, które im służyły, mogą jeszcze służyć w
niektórych zrównaniach wyższych ogołoconych s pe-
wnych terminów: tu znówu w §. 19. dostrzegliśmy
że gdyby zrównanie iakie można przerobić tak, aby
w niem ostatniego terminu brakowało, zniżyłoby się
o jeden stopień, przez tę sztukę moglibyśmy każde
zrównanie przywiesdź do tuż nie poprzedzającego.
Obie te uwagi powinnyby nam poddać takowe pyta-
nie: Czyby w zrównaniu iakiemkolwiek nie można
wyrzucić iakiego tylko chcemy terminu, bez narusze-
nia związku; abyśmy przez to wyrzucenie zrównanie
nasze mogli przywiesdź do prawideł znanych, lub
przynaymnię uczynić je prościyszem? Na rozwią-
zanie tego pytania mamy już sposoby wyżey podane
pod §. 9. wprowadziwszy bowiem drugą niewia-
domą będziemy mieli prawo czynić przypuszczenie
iakiego pytanie nasze wyciąga. Niech będą zrówna-
nia podane:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{---} \quad x^3 + px^2 + qx^2 + rx + s = 0.$$

uczyniwszy $x = y + m$, m będąc drugą niewiadomą,
zrównania podane odmieniemy na;

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + 3m.y^2 + 3m^2.y + m^3 \\ + a. + 2m. + am^2 \\ + b. + m \\ + c \end{array} \right\} = 0.$$

$$y^3 +$$

$$\left. \begin{array}{r}
 y^4 + 4m.y^3 + 6m^2.y^2 + 4m^3.y + m^4 \\
 + p. + 3pm. + 3pm^2. + pm^3 \\
 + q. + 2qm. + qm^2 \\
 + r. + rm \\
 + s
 \end{array} \right\} = 0.$$

chcąc teraz wyrzucić którykolwiek nam się podobą termin, z równania podanego, nie zostało nam, tylko tego terminu współ-czynnik w równaniu przerobionem, uczynić zero; co nam da równanie warunkowe służące na oznaczenie nowęj wprowadzonęj nieznanęj m , przez współ-czynniki znane a, b, c , albo p, q, r, s . W pierwszym równaniu chcąc wyrzucić drugi termin, wypadnie $3m+a=0$; chcąc trzeci termin wyrzucić, otrzymamy $3m^2+2ma+b=0$, na ostatni termin przypadnie $m^3+am^2+m+c=0$; podobnie należy uczynić w równaniu drugim: na drugi termin $4m+p=0$; na trzeci $6m^2+3pm+q=0$, na ostatni $m^4+pm^3+qm^2+rm+s=0$.

Widzemy więc oczywiście, że na wyrzucenie 2go terminu w jakimkolwiek równaniu podanem trzeba nam rozwiązać równanie 1go stopnia; na wyrzucenie 3go terminu, równanie 2go stopnia; na wyrzucenie 4go terminu równanie 3go stopnia, aby wynależdź m ; na wyrzucenie więc ostatniego terminu trzeba nam rozwiązać równanie tego samego stopnia, w którym się znajduje równanie podane; co nas prowadzi do takiej samej trudności jakąśmy usiłowali zwyciężyć. Wszystkie przeto sposoby które spostrzegaliśmy w własnościach równań do ich rozwiązania, albo są niedostateczne, albo nas rzucają na te same trudności które znaleźliśmy na pierwszym wstępie. Prawda atoli którąśmy dopiero odkryli nadgródzą swą pięknoscią nasze kłuszenia.

Wyrzucenie 2go terminu zawisło w pierwszym równaniu od $3m+a=0$, co daie $m=-\frac{a}{3}$; w drugim

równaniu $4m+p=q$ $m=-\frac{p}{4}$, gdybyśmy byli wzięli równanie:

G₁ $x^n +$

$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \dots + k = 0$ i t. d. $+k=0$ znaleźlibyśmy byli że wyrzucenie w niem 2go terminu za-

wiśło od zrównania $mn+p=0$, co daie $m=-\frac{p}{n}$;

to jest: że chcąc wyrzucić z iakiegokolwiek zrównania 2gi termin, należy wziąć za iego niewiadomą inną, dodawszy do niej współ-czynnik 2go terminu ze znakiem przeciwnym, rozdzielonego przez wykładnika stopnia: takim sposobem, zmniejszyemy jednym terminem zrównanie podane nie naruszwszy w niem związku.

§. XXIII.

Z własności
zrównań wy-
ciąga się do-
wód wzoru
Newtona.

Kiedy więc sposoby w własnościach zrównań dostrzeżone nie udały nam się na ich rozwiązanie ogólne, zostawmy te badania na potem, a teraz wróciwszy się ielzcie do zrównań na początku §. 19. z mnożenia wyciągnionych, uczynmy w nich wszystkie pierwiastki równe, to jest $a=b=c=d=e$ i t. d. zrównania nasze odmieniają się na różne potęgi, i tak otrzymamy

$$\text{z pierwszego} \quad x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3 = 0.$$

$$\quad \quad \quad x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3 = 0$$

$$\text{z drugiego} \quad x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 = (x-a)^4 = 0$$

$$\quad \quad \quad x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x+a)^4 = 0.$$

Gdybyśmy byli rostrzafali wyższych stopni zrównania, pokazałyby nam się z nich w terażniejszyem przypuszczeniu wyższe potęgi, które wszystkie razem podają nam dowód tych praw, któreśmy tylko s samego rachunku w potęgach wielokształtnych (*multiformes*) dostrzegli. Teorya bowiem ogólna zrównań dopiero spostrzeżoną uczy nas, że współczynnik 2go terminu zamykać powinien sumę wszystkich wartości x , gdy te wartości wszystkie są między sobą równe, jedna z nich tyle razy być powinna powtórzoną, ile ma iedności wykładnik najwyższy ilości niewiadomey. Przeto jeżeli m jest ten wykładnik; ponieważ tyle być powinno pierwiastków zrównania;

powinno

powinno toż samo m być współ-czynnikiem drugiego terminu. *Powtórę:* Mnogości z dwóch na raz pierwiastków odmienia się każda z osobna na a^2 ; mnogość każda s trzech pierwiastków na a^3 , i t. d; przeto współ-czynnik trzeciego terminu zamykać powinien a^2 tyle razy powtórzone, ile pierwiastki a, b, c , i t. d; mnożone po dwa na raz, wydadz mogą mnogości różnych. Współ-czynnik czwartego terminu zamykać powinien a^3 tyle razy, ile też same pierwiastki dadzą mnogości różnych, mnożąc je po trzy na raz, i t.d. Więc dla oznaczenia trzeciego, czwartego, piątego, mgo terminu wiedzieć należy, wiele m liter dadz może różnych mnogości, mnożąc je po dwie, po trzy, po cztery, i t.d. na raz.

Nie jest zaś trudno dostrzec, iż mając m liter, i układając ich po dwie, po trzy, po cztery, i t. d. między sobą, przez wszystkie które się tylko wynaleśdż mogą położenia; nie jest mowię trudno dostrzec, że:

Naprzód: Liczba kombinacyi układając ich po dwie, będzie dwa razy większą od liczby mnogości różnych, mnożąc ich po dwie. Mając bowiem dwie litery a, b , można z nich zrobić dwa porządki ab, ba ; ale te dwa porządki nie czynią tylko jedną też samą mnogość.

Powtórę: Liczba porządków kombinując kilka liter po trzy, jest sześć razy większą od liczby mnogości różnych, mnożąc je po trzy. Ułożywszy bowiem n.p. trzy litery a, b, c , we wszystkie mogące się wynaleśdż porządki, mam sześć kombinacyi, $abc, acb, cab, bac, bca, cba$; mnogość ich atoli jest tylko jedna. Tym-że samym sposobem postępując, dostrzeżemy, że cztery n.p. ilości mogą mieć 24 kombinacyi, wszystkie atoli nie czynią tylko jedną mnogość. Podobnie, liczba kombinacyi wielu liter po pięć na raz, jest sto dwadzieścia razy większą od liczby mnogości; i t. d.

A co na jedno wynidzie: że liczba mnogości z dwóch

na raz liter jest $= \frac{\text{licz. kombin.}}{1.2}$; liczba mnogości ró-

żnych s trzech na raz liter $= \frac{\text{liczb. kombin.}}{1.2.3}$; s czte-

rech liter $= \frac{\text{liczb. kombin.}}{1.2.3.4}$; s pięciu liter $= \frac{\text{liczb. kombi.}}{1.2.3.4.5}$

i t.d. to jest ogólnie mówiąc: że liczba mnogości z ilekolwiek liter, jest równa ułomkowi, którego licznik pokazuje liczbę kombinacji, a mianownik mnogość z liczb naturalnych 1. 2. 3. 4. 5. i t.d. aż do téj, która oznacza z wielu liter składa się mnogość. Zebyśmy więc znaleźli wzór ogólny na wyrażenie każdego współczynnika w potęgze dwó-wyrazowej, wiedzieć nam teraz należy liczbę kombinacji złożonych z m liter, układając je po dwie, po trzy, po cztery i t. d. Zastanówmy się nad tém dociekaniem:

Mając m liter i chcąc ich układać po dwie na raz, ponieważ jedna litera nie może się kombinować sama s sobą, oczywista jest rzecz, że jest $m-1$ liter do kombinowania z nią; więc ta jedna litera da $m-1$ kombinacji; a ponieważ jest m liter, więc będzie $m \cdot m-1$ kombinacji. Przeto liczba mnogości różnych z dwóch na raz liter, wyrazi się przez $m \cdot m-1$.

Chcąc kombinować po trzy na raz litery, potrzeba, aby każda kombinacja z dwóch liter układała się s każdą inną literą której nie zamyka, to jest z liczbą liter wyrażoną przez $m-2$; przeto każdy z osobna porządek z dwóch liter wyda $m-2$ kombinacji s trzech liter; więc ponieważ jest $m \cdot m-1$ kombinacji z dwóch liter, a każda z nich wyda $m-2$ kombinacji s trzech liter, będzie wszystkich kombinacji s trzech liter: $m \cdot m-1 \cdot m-2$; więc liczba mnogości

gości różnych s trzech liter wyraża się przez m .
 $(m-1)(m-2)$

2. 3.
 Ciagnąc dalej to samo rozumowanie, znajdziemy, że liczba kombinacyi czterech liter wyraża się przez $m(m-1)(m-2)(m-3)$; ponieważ należy każdą kombinacyą s trzech liter ułożyć z inną czwartą, której ona nie zamyka, a zatem zostaje $m-3$ liter do kombinowania s każdym porządkiem trój-literanym; dostanie się więc na każdego $m-3$ kombinacyi: aże jest $m(m-1)(m-2)$ takowych porządków; wypadają $m(m-1)(m-2)(m-3)$, kombinacyi po cztery na raz litery. Zaczem liczba mnogości różnych wyraża się przez $m(m-1)(m-2)(m-3)$. Tym sposobem do-

1. 2. 3. 4.
 wiadź łatwo, że liczba mnogości s pięci liter, równa jest, $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$, s sześciu liter -

1. 2. 3. 4. 5.
 $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)$, it.d. Wnie-

1. 2. 3. 4. 5. 6.
 śmy więc s tych wszystkich uwąg; że potęga m dwó-
 wyrazowey ilości $x+a$ tak się wyraża ogólnie:

$$(x+a)^m = x^m + m x^{m-1} a + m \frac{m-1}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + m \frac{m-1}{1 \cdot 2} a^3 x^{m-3} + m \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4 x^{m-4} + \text{it. d.}$$

$$(m-2) a^3 x^{m-3} + m \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4 x^{m-4} + \text{it. d.}$$

3. 1. 2. 3. 4.
 Przysłaliśmy więc do ściśłego dowodu wzoru Newtona, którego niekończoné jest użycie po całej Matematyce i Fizyce. Mógłby nam kto zarzucić, że wzór do odwikłania funkcyi służący, nie zawierający żadnego związku dowiedliśmy przez teorią zrównań, a przeto prawdę ogólną przez szczególną, ale za-
 trzymawłszy się myślą nad wielką ogólnością zrównań tu przytósowanych przyznamy, że te wyraża-
 iając iakikolwiek związek wszystkich razem ilości w
 G4 funkcyi

funkcyi zamkniętych, ani będąc do żadnych szczególnych związków między terminami przywiązane, rociągając swoje własności do równań *TOSAMYCH* (*identica*), do których należeć mogą wszystkie wzory na swe terminy odwiktane, a zatem i teraznięjszy. Oprócz tego własności równań, które nam tu do tego dowodu służyły, nie są zagruntowane na koniecznym związku ale raczej na składzie funkcyi w zrównanie wchodzących. Stęgo owszem przykładu pokazuje się jeszcze iasnię to, cośmy już wyżej dostrzegli, iak jest ściśła wzajemność między równaniami, i funkcyami im odpowiadającemi; iak doskonałość jednych wpływa w doskonałość drugich, iak nakoniec jedne objaśniaia i dowodzą drugie, w czém jednak należy nam bydz bardzo ostrożnemi na całosć praw geometrycznych, które nam nakazuią nayściślejsze przestrzeganie ogólnosci początków.

Należy nam tu tylko to jeszcze uwazyć, że cały dowód teraznięjszego wzoru tak jest rozporządzony, iż ieden iego termin dowodzi się przez drugi poprzedzający. Zostae nam więc jeszcze takową znaleśdz demonstracyą, któraby służyła na każdy termin bez żadney zawiśłości od innych, ale tak rozległą ogólnosć składaiącą całą piękność matematycznych początków będzie dopiero w mocy wyższych matematyki części.

Użycie wzoru
Newtona ro-
ciągnionę do
potęg iakich-
kolwiek wy-
kładników.

Zatrzymamy się teraz nad różnem przerobieniem naszego wzoru i iego użyciem: mając wzgląd na ilość z wykładnikami odjemnemi, przekonamy się, że wzór Newtona tak się może wyrazić:

$$(x \pm a)^m = x^m \left(1 \pm m \frac{a}{x} + \frac{m(m-1)a^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3} \right.$$

$$\left. + \frac{a^3}{x^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^4} \text{ i t. d. } \right) = x^m \left(1 \pm \frac{a}{x} \right)^m,$$

który wyraż służyć nam będzie niżej.

Nie

Nie potrzeba nam zaś zapomnieć że ten wzór funkcji dwó-wyrazowej prowadzi nas do podobnego wynoszenia funkcji wieló-wyrazowych trzymając się sposobu brania kilku terminów za jeden wyżej wyłożonego. Nadarzą nam się tu jedno pytanie: czyli odwikłanie funkcji dwó-wyrazowej podług wzoru Newtona oznaczonej wykładnikiem całkowym i dodatnim, rościągnać się może do funkcji z wykładnikiem ułomkowym i ujemnym; to jest: czyli te same prawa które nam służą do wyrażenia $(x+a)^m$, służyć

nam ieszcze mogą do wyrażenia $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ lub - - - - $(x+a)^{-p}$, p będąc ułomkiem lub liczbą całkową. Dowód któryśmy wyżej wyłożyli, nie pokazuje nam tego; ważną atoli jest barzo rzeczą rostrząsnąć czyli prawdę nie dalej się rościąga niżesmy ją ogarneli, a upowłzechnienie naszych myśli byłoby tego rostrzągnięcia pierwszym naszym przed skutkiem. Oprócz tego wynikłyby z tego inne ieszcze pożytki, które powinniśmy łatwo zgadnąć z poprzedzających wiadomości. Jakimże się tedy sposobem o tym domysle zapewnić? Owóż jeden, który nam się tym czasem nadarza:

Przypuśćmy że to, o czém się domyslały, jest

prawdą, i wyrażmy $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ podług praw wyższych, wypadnie nam:

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{\frac{m}{n} a}{1} + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) a^2}{1 \cdot 2 x^2} + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right) a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 x^3} \right. \\ \left. + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right) \left(\frac{m}{n} - 3 \right) a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 x^4} + \text{i t. d.} \right) \quad (P)$$

wszystkie terminy następujące w tym szeregu po $x^{\frac{m}{n}}$ dności, nazwiemy p , a wzór nasz zamieni się na $(x+a)^{\frac{m}{n}}$

$= x^{\frac{m}{n}} (1+p)$, wyniosłszy obydwie członki do potęgi n , będzie: $(x+a)^m = x^m (1+p)^n$ zrównanie tożsame: jeżeli więc $x^m (1+p)^n$ rozwiążawszy, i przywróci-

G5

wfszy

wfzy p swoię wartość, otrzymamy takie same terminy, iakié nám wyżej dał wzór $(x+a)^m$; znakiem będzie, że wzór Newtona prowadząc do wypadków prawdziwych, rościągá się iefzcze na wykładniki ułomkowe dodatné. Rachunek powinién nás o tém przekonać: doświadczmy go:

$$(1+p)^n = 1 + np + n \cdot \frac{(n-1)}{2} p^2 + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} p^3 + n \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 + \text{i t. d.} \quad (A)$$

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} +$$

$$\frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right) \left(\frac{m}{n} - 3 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{a^4}{x^4} + \text{i t. d.}$$

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2} \frac{a^2}{x^2} + 2 \frac{m^2 \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \frac{a^3}{x^3} + \text{i t. d.}$$

$$p^3 = \frac{m^3}{n^3} \frac{a^3}{x^3} + \text{i t. d.} \text{ té wfzytkié wartości różnych po-}$$

tęg p , położywfzy za p , p^2 , p^3 i t. d. w wzorze (A),

i ułożywfzy terminy podług potęg $\frac{a}{x}$, wypadnie:

$$1 + m \cdot \frac{a}{x} + \frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{m \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} + \text{i t. d.}$$

$$+ \frac{m^2 \left(\frac{m}{n} - 1 \right)}{2} + \frac{2mm \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{2} + \text{i t. d.}$$

$$+ \frac{m^3 \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right)}{2} + \text{i t. d.}$$

wykonáwfzy mnożenie wfzytkich współ-czynników, i wymazáwfzy terminy wzajemnie się znofzác, otrzymamy

mamy za współ-czynnik a ilości $\frac{a^2}{x^2}$, $\frac{m(m-1)}{2}$, $\frac{(m-1)}{2}$
 $\frac{(m-2)}{3}$ za współ-czynnik $\frac{a^3}{x^3}$ i t.d. a przeto wzór Ne-

wtóna przyprowadza nas do tak pewnych wypadków w potęgach wykładników ułomkowych dodatnich iak i w wykładnikach całkich.

Co się zaś tycze wykładników odjemnych n. p.

$(x+a)^{-\frac{m}{n}}$, potóżmy $(x+a)^{-\frac{m}{n}} = Q \cdot 1 = Q(x+a)^{\frac{m}{n}}$;

ieżeli rozebrawszy te funkcyę podług wzoru Newto-
 na trafiemy na takie wypadki, iakie nam to zró-
 wnanie pokazuje, pewni bydz możemy, że wzór Ne-
 wtóna rościągá się nawet do funkcyi z wykładnika-
 mi odjemnemi. Doświadczmy trzech przynajmniey
 początkowych terminów,

$$(x+a)^{-\frac{m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}} \left(1 - \frac{m}{n} \frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}+1)}{2} \frac{a^2}{x^2} - \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}+1)}{2} \right.$$

$$\left. \frac{(\frac{m}{n}+2)}{3} \frac{a^3}{x^3} + \text{i t.d.} \right) \quad (Q)$$

$$(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{m}{n} \frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}+1)}{2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}+1)}{2} \right.$$

$$\left. \frac{(\frac{m}{n}+2)}{3} \frac{a^3}{x^3} + \text{i t.d.} \right)$$

rozmnożywszy pierwszy szereg przez drugi, i staną-

wszy przynajmniey na współ-czynnik $\frac{a^3}{x^3}$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} x^{\frac{m}{n}} - \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}+1)}{2} \frac{a^2}{x^2} - \frac{\frac{m}{n}(\frac{m}{n}+1)(\frac{m}{n}+2)}{2 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} \right. \\ \left. + \frac{m}{n} \frac{a}{x} - \frac{m^2 a^2}{n^2 x^2} + \frac{m^2}{n^2} \left(\frac{m}{n} + 1 \right) \frac{a^3}{2 x^3} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) a^2}{2} - \frac{\frac{m^2}{n^2} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) a^3}{3} + \frac{\frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} - 1 \right) \left(\frac{m}{n} - 2 \right) a^3}{2 \cdot 3 x^3}$$

wykonawszy cały ten rachunek, który tu jest naznaczony, otrzymamy terminy wszystkie wzajemnie się znoszące, tak dalece, że cały szereg będzie równy jedności, podług zrównania $1 = Q(x+a)^{\frac{m}{n}}$. Pewni więc jesteśmy, że wzór Newtona rościaga się do funkcji iakichkolwiek wykładników całkowych lub ułamkowych, dodatnich lub odjemnych. Dowód więc ten któryśmy wyżey z teoryi zrównań i kombinacji wyciągli, lubo się zdawał ogólnym, jest jednak szczególnym barzo, bo się tylko rościaga do samych wykładników całkowych dodatnich. - Tę zaś ostatecznie dowody są raczej doświadczeniami rachunku, niżeli ściślemi dowodami Matematycznymi; zaczęm zofstaie nam ieszcze do wyższych części taki dowód wzoru Newtona, któryby się swą ogólnością rościagnął do wszystkich iakichkolwiek wykładników.

Stosowanie
wzoru Newto-
na do wyciąga-
nia pierwia-
stku w potęgach iakich-
kolwiek,

Ponieważ wykładniki ułamkowe oznaczają zawsze wyciąganie pierwiastków; przeto wzór Newtona służy nam nie tylko do wynoszenia funkcji do potęg iakichkolwiek, ale nawet do wyciągania pierwiastków z funkcji zupełnych i niezupełnych. Tę ostatecznie, ponieważ nigdy nie prowadzą do wyrazu skończonego, zaczęm pafmo terminów w potęgach niezupełnych pociągnie się bez końca, i da to, co nazywają SZEREGIEM (Series). Jeżeli w tym szeregu terminy tém się barziéy zmniejszają im są odlegléy-

szé, to test, kiedy $\frac{a}{x}$ jest prawdziwym ułamkiem; Szeregi nazywają się MAŁEJĄCEMI (Convergentes); jeżeli zaś té terminy tém się barziéy powiększają im się

się dalej ciągną, to jest, kiedy $\frac{n}{x}$ jest liczbą całkową lub ułamkiem fałszywym, nazywają się WZRASTAJĄCEMI (*Divergentes*).

Trafiliśmy już na dwa gatunki funkcji, które nas prowadzą do szeregów, a które biorą swój początek w działaniach przywiązanych do pewnych kondycji, iakie są dzielenie i wyciąganie pierwiastków. Ten rodzaj rachunku zatrzyma nas niżej z większą obfisznością.

Wzory któreśmy podali na wykładniki ułamkowe, użyte być mogą w liczbach niewymiernych, kiedy nam w nich zachodzi wyciąganie pierwiastków n.p. chcąc znaleźć wartość $\sqrt{101}$, potrzeba nam nałamać $\sqrt{101}$ przywieść do wyrazu takiego, w jakim się znajdą nasze wzory, to jest: do $100^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{\frac{x}{2}}$,

a uczyniwszy w wzorze (P), $x=100$, $\frac{n}{x}=0,01$, $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$ otrzymamy:

$$\sqrt{101} = 10 \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = 10 \left(1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8} + \frac{(0,01)^3}{16} - \frac{5(0,01)^4}{128} + \frac{35(0,01)^5}{1280} - \text{i t. d.}\right)$$

każdy z tych terminów zamieniwszy na ułamek dziesiętny, i dodawszy ich razem, otrzymamy za wartość $\sqrt{101}$, liczbę bliską 10,0498756 i t. d.

Nie chcemy się bawić nad przykładami takowych działań, bo każdy zrozumiałszy ogólne początki będzie w stanie sam przez się w nich podług upodobania ćwiczyć się.

§. XXIV.

Nie zgubmy się w tych wycieczkach, do których nas wyciągnęły własności ogólne równań. Uważaliśmy iakiegokolwiek stopnia równanie, iako podobne do równań pierwszego stopnia przez siebie rozmnożeniu.

o liczbie pierwiastków rzeczywistych i urojonych w równaniu.

rozmnożonych, możemy je więc jeszcze uważać jako powstające z równań innych stopni od siebie niższych, byleby tak dobranych; aby z ich mnogości wypadł mogło równanie podane; i tak równanie 3go stopnia możemy uważać jako powstające z równania 2go stopnia przez zrównanie 1go; zrównanie 5go stopnia, jako powstające z równania 3go stopnia przez zrównanie 2go rozmnożone, i t. d. Jeżeli będziemy uważać równania wyższe jako powstające z równania 2go stopnia; ponieważ te mogą zamykać pierwiastki urojone, równania także wyższych stopni będą mogły zamykać tyle par pierwiastków urojonych, ile w ich skład wchodzi równań 2go stopnia. Zaczem równania stopni parzystych będą mogły mieć wszystkie pierwiastki urojone, stopni zaś nieparzystych muszą mieć koniecznie przynajmniej jeden pierwiastek rzetelny.

Uważając iakięgokolwiek stopnia m równanie, jako powstające z równań 2go stopnia; tych równań tyle tylko wchodzić może za mnożników w równanie m , ile razy 2 zamyka się w wykładniku stopnia. Ale ponieważ zrównanie stopnia m , zamyka m pierwiastków, z nich tyle możemy ułożyć równań 2go stopnia, ile razy kombinować możemy m pierwiastków, biorąc ich po dwa na raz, to jest

$m \cdot \frac{m-1}{2}$ Każde więc równanie stopnia m wydadź

może $m \cdot \frac{m-1}{2}$ Równań 2go stopnia; ale takowych równań nie wchodzi w jego skład tylko liczba

$\frac{m}{2}$ gdybyśmy więc chcieli wyrazić przez równanie $x^2+ax+b=0$ wszystkie równania 2go stopnia, które tylko wydadź może zrównanie stopnia m , potrzeba aby b będąc mnogością wszystkich pierwiastków, tyle miało wartości, ile wypadł może kombinacji z m pierwiastków, biorąc ich po dwa na raz; zaczem

czem b musi być dane przez równanie stopnia m .

$\frac{m-1}{2}$

toż samo trzymać mamy i o a , które jest sumą pierwiastków. Podobne rozumowanie przekoná nas równie, że uważając równanie m jako powstające z równań 3go stopnia, i chcąc té wszystkie równania 3go stopnia ogarnąć w równaniu $x^3+ax^2+bx+c=0$, musi c być dane przez równa-

$(m-1)(m-2)$

nie stopnia m . $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ ponieważ tyle wypadá kombinacyi z m pierwiastków biorąc ich po trzy na raz, a zatem tyle złożyć można równań 3go stopnia, s których jednak nie wchodzi za mnożników

w równanie stopnia m tylko liczba $\frac{m}{3}$. Wnieście sobie każdy iak należy rozumować o równaniach wyższych stopni uważając je iako mnożniki stopnia m . Weźmy za przykład równanie 4go stopnia na początku §. 19. położone $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, biorąc z iego pierwiastków po dwa na raz, ułożemy sześć równań 2go stopnia, s których każde dwa rozmnożone przez się, dadzą równanie czwartego stopnia podane; to jest:

$(x-a)(x-b)$ rozmnożone przez $(x-c)(x-d)$

$(x-a)(x-c)$ - - - $(x-b)(x-d)$

$(x-a)(x-d)$ - - - $(x-b)(x-c)$

$(x-b)(x-c)$ - - - $(x-a)(x-d)$

$(x-b)(x-d)$ - - - $(x-a)(x-c)$

$(x-c)(x-d)$ - - - $(x-a)(x-b)$.

Gdybyśmy doszli sposobu rozebrania równań iakięgokolwiek stopnia na równania pierwszego lub drugiego, które już umiemy rozwiązać, przyszlibyśmy do prawideł na wynalezienie pierwiastków każdego równania. Nie możemy wątpić, że mając n. p. jedno przynajmniej równanie 1go lub 2go stopnia wcho-

dzące

dzące w skład równania stopnia m , możemy przez nie to równanie rozdzielić i zniżyć je do stopnia $m-1$, albo $m-2$. Bo mając n.p. równanie $x-a=0$, które wchodzi w skład równania A któregośkolwiek stopnia, tak dalece, że włożywszy w A , $x=a$, A przywiedzie się do zero; musi koniecznie A być zupełnie rozdzielną przez $x-a$. Wątpiemyż o tem? nazwiemy w równaniu A wszystkie inne pierwiastki oprócz $x-a$, Q ; więc jeżeli A nie jest zupełnie rozdzielną przez $x-a$, wypadnie podług prawideł

dzielenia $\frac{A}{x-a} = Q + \frac{R}{x-a}$ R znacząc resztę z dzie-

lenia pozostałą, a zatem $A = (x-a)Q + R$, uczyniwszy $x=a$, $(x-a)Q$ będzie zero; ale i A jest także na ten czas zero, podług pierwszego przypuszczenia,

więc $R=0$, a przeto $\frac{A}{x-a} = Q$.

§ XXV.

Tłómaczy się
potrzeba i spo-
sób uwolnien-
ia zró-
wnań od zna-
ków pierwi-
astkowych i od
niewymier-
ności.

Niech poydziemy dalej, uczynimy tu krótką uwagę: każdy stopień równania ma swoje właściwe do rozwiązania go prawidła i własności z nich wynikające, nie możemy więc poty przystąpić do rozwiązania jakiegokolwiek równania, póki się nie dowiemy o jego stopniu. Sądziemy zaś o stopniu jakiegokolwiek równania z wykładnika ilości nieznaney, jeżeli wszystkie są całkowite; ale jeżeli który z wykładników będzie łomany, przerwie się porządek, który w równaniach foremnych zachować zwykły wykładniki nieznaney ilości: poty więc nie możemy być w stanie sądzić o stopniu równania, a zatem nie możemy przystąpić do rozwiązania onego, póki wszystkich ilości nieznaney wykładników nie przywiedziemy do całkowitych. Wykładniki ułamkowe pokazują znaki pierwiastkowe w równaniu, które iść i tę mają nieprzyzwoitość, że będąc przywiązane do wielorakich znaczeń wprowadzają nas w wątpliwość, czyli

czyli wszystkie te znaczenia czyli tylko jedno, i które do naszego pytania należy. Jest więc rzeczą najpierwszą jeżeli przystąpimy do rozwiązania jakiegokolwiek równania, oswobodzić je ze wszystkich znaków pierwiastkowych. Zatrudniemy się teraz tem działaniem.

Wiemy, że znaki pierwiastkowe odpadają wynosząc do téj samej potęgi ilości pod niemi zawarte, dla tego sposób, którego tu użyjemy jest łatwy do zrozumienia iako wyciągnięty s poprzedzających wiadomości. Jasnięj on się pokaze w rachunku, niż gdybyśmy go słowy wykładali. Niech będą zrównania.

$$x^2 + a\sqrt{x+m} = 0 \quad - \quad x^3 - \sqrt[3]{(x-a)+d} = 0 \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 + xd + f} = 0,$$

odbędźmy się z dwiema pierwszymi nasámpród:

$$a\sqrt{x} = -(x^2 + m) \quad - \quad x^3 + d = \sqrt[3]{(x-a)}$$

$$a^2x = (x^2 + m)^2 \quad - \quad (x^3 + d)^3 = x - a, \text{ czyli:}$$

$$x^4 + 2mx^2 - a^2x + m^2 = 0 \quad - \quad x^9 + 3dx^6 + 3d^2x^3 + d^3 - x + a = 0,$$

pierwsze więc jest czwartego, a drugie dziewiątego stopnia. Równanie trzecie, dwa zamykają znaki oddzielone, a zatem, dwoiakie takowe w niem zachodzi działanie: naprzód

$$\sqrt{x^2} = -(\sqrt{x+xd+f}) \quad - \quad x^2 = -(\sqrt{x+xd+f})^3, \text{ a}$$

nazwáwszy $xd+f=p$; mamy, $x^2 = -p^3 - 3p^2\sqrt{x} -$

$$3px - x\sqrt{x}, \text{ czyli } -x^2 + p^3 + 3px = -(3p^2 + x)\sqrt{x},$$

$$(x^2 + p^3 + 3px)^2 = (3p^2 + x)^2x. \text{ włożywszy w to ostatnie za } p, xd+f, \text{ otrzymamy równanie szóstej stopnia wymierne.}$$

Gdybyśmy więcéj jeszcze mieli znaków pierwiastkowych w równaniu, złączonych s sobą przez same znaki dodatnie lub odjemne; działanie

temby było trudniejszy, i ten sposób iéżceby nam się nie zawsze udał. Użyjmy przeto innego.

Oswobodzić równanie iakie od znaków pierwiastkowych

II

fikowych

stkowych. jest to tyle wprowadzić kondycji do naszego równania, ile się takowych znaków potrzebu-
jących osobnego działania znajduje w równaniu. Wszystkie te kondycje ściągają się do tego aby te
znaki znikły; nie można im więc inaczej uczynić za-
dofyć, tylko wprowadziwszy tyle innych nieznanych
ilości, ile się liczy znaków pierwiastkowych w zrów-
naniu, podług §. 9. Ale iakże kilka nieznanych
ilości wprowadzić w jedno równanie, którego nie
mamy s czém kombinować? Widzemy że początek
§. 9. potrzebuje tu sposobu nagięcia go do terażni-
szego przypadku. Ten sposób jest barzo prosty.
Uczynimy każdy termin znak pierwiastkowy. zamy-
kający równy iednój nieznanej, przez co otrzymá-
my tyle równań, ile mamy znaków pierwiastko-
wych w równaniu; włożmy potem wszystkie nie-
znane na miéysce niewymiérnych w równanie po-
dane; a każde s pierwszych równań wynioszsy do
tój potęgi, którą znak pierwiastkowy oznacza, otrzy-
mamy liczbę równań $m+1$: ieżeli znaków pierwia-
stkowych liczba jest m . Te wszystkie równania
staráymy się tak kombinować, aby z nich wszystkie
nieznane nowo wprowadzone wypadły. Przydzie-
my tym sposobem przez eliminacyą do równania
pewnego stopnia zamykającego same terminy wy-
mierne z iedną nieznaną. Niech będzie n.p. zrów-
nanie:

$$x^2 - \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{d^2} + \sqrt{x} + g = 0$$

czynię $\sqrt[3]{ax} = y$, $\sqrt[3]{d^2} = z$, $\sqrt{x} = u$; s kąd
mám cztery równania:

$$(1) \cdot \cdot x^2 - y + z + u + g = 0 \cdot \cdot (2) \cdot \cdot ax - y^3 = 0 \cdot \cdot$$

$$(3) \cdot \cdot d^2 - z^3 = 0 \cdot \cdot (4) \cdot \cdot x - u^2 = 0$$

ostatnie daie mi $x = u^2$; złączone z drugim $ax = au^2$:
te wartości włożone w (1) (2). daią mi dwa zrów-
nania bez x

$$u^4 - y \cdot$$

mogę w dwóch podanych równaniach albo wyrzucić a, A , i rozdzielić potem równanie przez x ; albo też zaraz wyrzucić bx, Bx . Na ten koniec mnożę pierwsze przez A , drugie przez a , odciągając jedno od drugiego i mam:

$$Abx - aBx = 0 \quad \dots \quad Ab - aB = 0.$$

albo mnożę pierwsze przez B , drugie przez b i odciągając jedno od siebie otrzymam: $Ba - Ab = 0$.

Niech będą podane dwa równania 2go stopnia:

$$a + bx + cx^2 = 0 \quad \dots \quad A + Bx + Cx^2 = 0.$$

mnożę pierwsze przez A , drugie przez a , i odciągając tamto od tego rozdzieliwszy je przez x , wypadnie:

$$Ab - Ba + (Ac - Ca)x = 0.$$

powtóre mnożę pierwsze przez C , drugie przez t , a ich różnica będzie:

$$Ac - aC + (Bc - bC)x = 0.$$

przystępujemy do dwóch równań 1go stopnia z którymi obfzedliśmy się podług 1go przypadku przyjdzie nam do równania:

$$(Ac - Ca)(Ac - Ca) - (Bc - bC)(Ab - Ba) = 0.$$

widzimy więc że eliminacyą w drugim stopniu przywiodła nas do ostatniego równania które jest 4go stopnia, tak iak w pierwszym stopniu do równania 2go.

Mając podane dwa równania 3go stopnia:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 \quad \dots \quad A + Bx + Cx^2 + Dx^3 = 0.$$

mnożę pierwsze przez A , drugie przez a , i odciągając jedno od siebie przyjdę do

$$Ba - bA + (Ca - cA)x + (Da - dA)x^2 = 0.$$

powtóre do wyrzucenia ostatnich terminów mnożę pierwsze przez D , drugie przez d , a ich różnica da mi:

$$Ad - Da + (Bd - bD)x + (Cd - cD)x^2 = 0.$$

dwa te równania 2go stopnia chcąc kombinować podług

podług poprzedzającego przypadku, nazywam dla ułatwienia rachunku

$$Ba - bA = A' \quad \dots \quad Ad - Da = a'$$

$$Ca - cA = B' \quad \dots \quad Bd - bD = b'$$

$$Da - dA = C' \quad \dots \quad Cd - cD = c'$$

a zrównania przerobione wyrażą się tym prościej-
szym sposobem:

$$A' + B'x + C'x^2 = 0 \quad \dots \quad a' + b'x + c'x^2 = 0.$$

s tych dwóch zrównań mnożę pierwsze przez a' , dru-
gie przez A' , a różnica ich da mi:

$$B'a' - b'A' + (C'a' - c'A')x = 0.$$

mnożę powtórę pierwsze przez c' , drugie przez C' ,
i otrzymam z ich odeśnięcia:

$$A'c' - a'C' + (B'c' - b'C')x = 0$$

na koniec dla ułatwienia rachunku nazywam:

$$B'a' - b'A' = A'' \quad \dots \quad A'c' - a'C' = a''$$

$$C'a' - c'A' = B'' \quad \dots \quad B'c' - b'C' = b''$$

i dwa zrównania przerabiając tym samym spo-
sóbem przyjdę do ostatecznego:

$$A''b'' - a''B'' = 0$$

które jest ósmego stopnia podług znaczeń liter, kto-
reśmy im nadali. To atoli zrównanie ósmego sto-
pnia ma jednego mnożnika wspólnego wszystkim ter-
minom $Ad - Da$, przez który rozdzielone wyda
zrównanie 6go stopnia

$$\begin{aligned} (Ad - Da)^3 + (Ac - Ca)^2(Cd - Dc) - 2(Ab - Ba)(Ad - Da)(Cd - Dc) \\ + (Bd - Db)^2(Ab - Ba) - (Ab - Ba)(Bc - Cb)(Cd - Dc) = 0 \\ - (Ad - Da)(Ac - Ca)(Bd - Db) \end{aligned}$$

ciągnąc dalej rachunek dwa zrównania 4go stopnia
przywodzą nas naprzód do zrównania 1o. stopnia,
które dobrze rostrząsnawszy znajdziemy w niem
mnożnika 8go stopnia, rozdzielone więc przez niego
zniży się do stopnia ósmego.

Przeto ten sposób tę ma w sobie nieprzyzwoitość,
że nas wiedzie do mnożników nie należących bynaj-

H₂

mniejszy

mniey do naszego zamiaru. W takowe mnożniki obwikłane zrównanie da pierwiastki fałszywe, które pytania nie rozwiążą, bo mu są cale obce. Nie mając więc sposobu na rozróżnienie tych pierwiastków które do pytania prawdziwie należą, od tych które niedoskonałość rachunku wciągnęła, jesteśmy w niebezpieczeństwie trafienia na fałszywe rozwiązanie pytania. Tać to przyczyna dała do myślenia Geometrom o innym nowym i dokładniejszy sposobie eliminacyi. Ich wielorakie badania są náylepszym dowodem nateżonych usiłowań, któremi chciano tę trudności pokonać. Obierzemy sobie jedno z nich, które wyciągnięte s czystych rozumowań, da nam dokładniejszy wyobrażenie o naturze tego rachunku; i służyć nam będzie mogło na rozwiązanie wielu innych różnego rodzaju pytań.

Zacznijmy od przykładu szczególnego: Mając dwa zrównania różnych stopni:

$$x^2 + Px + Q = 0 \quad \text{---} \quad x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

w których P, Q, p, q, r , zamykają inne iakiękolwiek ilości nieznané, a chcąc s tych zrównań wyrzucić x , nic innego sobie w tém nie zamierzamy, iak tylko zrobić jedno z nich zrównanie między P, Q, p, q, r ; to jest: odkryć związek który zachodzić powinien między wszystkimi innemi ilościami w zrównaniu potrzebny na to, aby wypadło x . Ale iakżeby ten związek można wyciągnąć z dwóch związków od siebie różnych, gdyby te nie miały sobie coś spólnego łączącego ie s sobą wzajemnie? Zaiście musi koniecznie zrównanie jedno iakąs zamykać własność, która służyć drugiemu, byłaby razem gruntem tego porównania które sobie między współ-czynnikami P, Q, p, q, r , zakładamy wynaleśdź. A ponieważ dwa zrównania, które tu sobie za przykład obraliśmy równie iak i wszystkie inne do téy teoryi służyć, chcemy mieć náyogólniejsze w swoim rodzaju, dla tego nie możemy w nich przypuszczać żadnego warunku, któryby ich znaczenie ścięśniał. Uwážając ie bez żadney

dnę między sobą zawzięłości, a nie mogąc przysiąc do rozwiązania tego pytania któreśmy tu sobie zadali nie wprowadziliśmy jakowej spójności między naszymi zrównaniami; musimy przydać drugi ten warunek potrzebny, i starać się obydwóm w rozwiązaniu zadość uczynić. Na czemże zagruntujemy tę spójność? oto na istotnym charakterze zrównań i ich pierwiastkach.

Zeby dwa zrównania mogły wydadz związek między ich współ-czynnikami, i oraz' bydz fobie w czym podobnemi, potrzeba koniecznie, aby ieden ich pierwiastek czyli wartość na x włożoną w iedno i drugie zrównanie, mogła ie obydwa razem przywiesdz do zero; więc zeby znaleźćs pewny związek między P, Q, p, q, r , któryby mógł zgubić x ; potrzeba koniecznie, aby obydwa zrównania miały ieden pierwiastek spólny; i całe pytanie naszé wychodzi na to: znaleźćs związek pewien między współ-czynnikami P, Q, p, q, r , potrzebny na to, aby obydwa zrównania podane miały ieden pierwiastek spólny:

Nazwiemy m ten spólny pierwiastek: będzie $x - m$ spólny mnożnik obydwóch zrównań, a przeto:

$$x^2 + Px + Q = (x - m)(x + A)$$

$$x^3+px^2+qx+r=(x-m)(x^2+ax+b),$$

gdzie A, a, b , są ilości nieznane: z dwóch tych ostatnich równań wypadają:

$$\frac{x^3+px^2+qx+r}{x^2+ax+b} = \frac{x^2+Px+Q}{x+A}$$

$$(x^3+px^2+qx+r)(x+A)=(x^2+Px+Q)(x^2+ax+b).$$

wykonawszy mnożenie otrzymamy zrównanie *Tofa-
me*, którego każdy termin w jednym członku, jedno
jest s terminem mu podobnym drugiego członka.
Równając więc między sobą współczynniki s tego
mnożenia wynikię, otrzymamy cztery zrównania:

$$(1) \cdot A+p=P+a \quad (2) \cdot Ap+q=Q+Pa+b$$

$$(3) \cdot Aq + r = Qa + Pb \quad \cdot \cdot \quad (4) \quad Ar = Qb.$$

H4 - pierwsze

pierwsze i drugie daie:

$A = P - p + a - b = Pp - p^2 + pa + q - Q - Pa$, te wartości włożywszy w (3) przyjdziemy do

$Pp(P - p) + pq - PQ - r = P(P - p)a - (Q - q)a$, a zatem

$$a = \frac{Pp(P - p) + pq - PQ - r}{P(P - p) - (Q - q)} = p - \frac{Q(P - p) + r}{P(P - p) - (Q - q)}$$

te same wartości za A, b , włożone w (4) równanie, wydadzą

$Q(P - p)a + ra = Qp(P - p) + Q(q - Q) - r(P - p)$, przeto

$$a = \frac{Qp(P - p) + Q(q - Q) - r(P - p)}{Q(P - p) + r} = p - \frac{Q(Q - q) + Pr}{Q(P - p) + r}$$

idzie więc za tem, że

$$\frac{Q(P - p) + r}{P(P - p) - (Q - q)} = \frac{Q(Q - q) + Pr}{Q(P - p) + r}, \text{ s którego po-}$$

wstaie następujące równanie:

$$Q(P - p)(Pq - Qp) + zQr(P - p) + Pr(Q - q) - P^2r(P - p) + Q(Q - q)^2 + r^2 = 0.$$

Zawierające w sobie te warunki, któreśmy do pytania wprowadzili, to jest: związek między współczynnikiemi potrzebny na to, aby obydwie równania podane miały ieden pierwiastek spólny. Pożmy już do przykładu ogólnego. Niech będą dwa równania iakiegokolwiek stopnia:

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + Sx^{m-4} + \text{i t. d.} = 0.$$

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + sx^{n-4} + \text{i t. d.} = 0.$$

s których należy wynaleśdź związek między współczynnikiemi potrzebny na to, aby znikło x , to jest: potrzeba wynaleśdź równanie między P, Q, R, S , i t. d. p, q, r, s , i t. d. aby obydwie równania miały ieden spólny pierwiastek czyli spólnego mnożnika $x - m$. Zaczem rządząc się wyżej podanym sposobem wypadnie.

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{i t. d.}$$

$$= (x - m)(x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + \text{i t. d.})$$

$x^n +$

$$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \text{i t. d.} \\ = (x-m)(x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + \text{i t. d.})$$

s których powstanie zrównanie to-samé:

$$(x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \text{i t. d.})(x^{n-1} + ax^{n-2} + bx^{n-3} + \text{i t. d.}) = (x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \text{i t. d.}) \\ (x^{m-1} + Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + \text{i t. d.})$$

równaiąc w niem współ-czynniki terminów podobnych, otrzymamy liczbę zrównań $m+n-1$, gdyż pierwsze terminy będąc też. same bez żadnego współ-czynnika, nie wnikną w porównanie; a ponieważ mamy niewiadomych, A, B, C, D , i t. d. liczbę $m-1$; niewiadomych zaś a, b, c, d , i t. d. liczbę $n-1$; na oznaczenie tych, wszystkich potrzeba liczby zrównań $m+n-2$; zostaje się więc iedno zrównanie nad to, które iak wiemy z §. 10. iest warunkowe, to iest zawierające w sobie kondycye wprowadzone, od których odpowiedź pytania zawisła. Teoryą tę winniśmy I. P. Eulerowi którą on podał w Pamiętnikach Akademii Berlińskiej na Rok 1764. Przysłówmy ią do zrównań któreśmy na końcu §. poprzedzającego zostawili. Przyszliśmy tam do dwóch zrównań,

$$y^3 - P = 0 \quad y^3 - Ay^2 + By + C = 0$$

s których nam potrzeba wyrzucić y . Podług dopiero wyłożonego sposobu,

$$y^3 - P = (y-m)(y^2 + ay + b) \\ y^3 - Ay^2 + By + C = (y-m)(y^2 + py + q) \\ \frac{y^3 - P}{y^2 + ay + b} = \frac{y^3 - Ay^2 + By + C}{y^2 + py + q};$$

$(y^3 - P)(y^2 + py + q) = (y^3 - Ay^2 + By + C)(y^2 + ay + b)$, po wykonaném mnożeniu równaiąc współ-czynniki podobne, otrzymamy pięć następujących zrównań:

$$(1) a - A = p \quad (2) B + b - Aa = q \quad (3) P = bA - Ba - C \\ (4) Ca + Bb = -Pp \quad (5) bC = -Pq$$

s których należy wyrzucić a, b, p, q . Mamy z (1), (2),

$$H_5 \quad a = A + p;$$

$a=A+p$; $b=A^2+Ap+q-B$, te wartości włożywszy w (4), (5), (3), wypadną te trzy na p .

$$p = \frac{B^2 - Bq - BA^2 - CA}{BA + C + P} \quad p = \frac{BC - (P + C)q - CA^2}{CA};$$

$$p = \frac{P + 2BA + C - A^3 - Aq}{A^2 - B};$$

równaiąc pierwszą wartość p , z drugą, wypadnie

$$BC^2 + PBC - PCA^2$$

$$q = \frac{BC^2 + PBC - PCA^2}{BAP + B^2 + P^2}$$

drugą zaś wartość na p równaiąc s trzecią, wyciągniemy

$$q = \frac{CAP + 2BCA^2 + C^2A + B^2C}{CB + PB - PA^2}, \text{ s porównania dwóch}$$

wartości na q , otrzymamy na koniec zrównanie fzu-
kané bez y .

$$(CAP + 2BCA^2 + C^2A + B^2C)(BAP + C^2 + P^2) - (BC^2 + PBC - PCA^2)(CB + PB - PA^2) = 0$$

włożywszy w nie za A, B, C, P , wartości, których one zastępowały miéysce w rachunku, otrzymamy zrównanie na u wymierné podług tego cośmy sobie w §. 25. zamierz yli.

§. XXVII.

Po tych wszystkich własnościach ogólnych zrównań, zostaje nam iedna uwaga wypadająca s pierwszych Roz: I. początków: ponieważ zrównanie iakiegokolwiek stopnia zamyka związek między ilościami w niem zawartemi, ten związek nie mógł wypaść tylko s porównania tychże ilości między sobą. Aże nie możemy nigdy równać s sobą tylko rzeczy iednéj natury; idzie za tém, że terminy w zrównaniu zamknięte są konieczn ie iednéj natury; to iest iednego wymiaru, czyli stopnia: gdyż natura ilości zależy na iednoznaczności wymiaru, wymiar zaś na równéj liczbie mnożników w termin wchodzących. Jeżeli więc zrównanie iakie iest rzetelne i mo-
gące

Różność zrównań wyklada się z różności wymiaru w terminach.

gacé co znaczyć, wszystkie iego terminy powinny byđz iednego wymiaru, to iest powinny mieć równą liczbę mnożników. Do tych mnożników nie należą bynajmniey liczby; bo te nie odmieniają nic w naturze ilości ogólney. Każde takowe zrównanie zamykaiące równą liczbę mnożników literalnych w swych terminach nazywá się IEDNO-RODNEM (*Aequatio homogenea*). n. p. $x^3 + 3a^2x + ax^2 + b^3 = 0$.

Ieżeli zaś liczba mnożników w terminach iakięgo zrównania iest nierówną, na tén czas uważać potrzeba każdy taki niedostateczny termin, iako rozmnożony przez tylé ilości wziętych za iedność, ilé mu mnożników do równego wymiaru brakuie: i takowe zrównanie zowie się RÓŻNO-RODNEM (*Aequatio heterogenea*) n. p. $x^3 + ax + 3b = 0$. tén sam podział i ta sama uwaga służy funkcyom, s których powstaia zrównania.

Skończmy tén Rozdział króciuteńką uwagą nad sposobem naszych dociekań. Bawiać się w początku naszych nauki nad iakiém pytaniem dochodziliśmy w niém związku przez stófunek i porównanie w myśli rzeczy znanych z nieznanemi: wszystkie té stófunki ogarneliśmy wprzód rozumowaniem, niżejmy ié wyrazili przez znaki, dla tego że tam kombinacye iestcze były barzo proste. Teraz zaś zapuściliśmy się w delikatniejszy pytania iakiém było n. p. to ostatnie, gdzie kombinacye zachodzą liczniejszy i zawikłysz, nie mogliśmy natychmiast rzeczy nieznaney z znanemi równać myślą, bo mnogość kombinacyi razém związanych i potrzebuiących prawie w momencie iednego ogarnienia iuż iest nad siły naszego rozumu swym działaniem oddanego: trzeba go tu było wesprzeć pomocą rachunku; przeto czyniać prawie podstęp pod trudnością, staraliśmy się náprzód pytanie nasze związać s początkiem iakim walnym; i za pomocą tego trafić na zrównanie, w któreby rzecz nieznaną weszła. Potém dopiero

Ho

uwážając

Dowodzą się
poprzedzają-
cych wiado-
mości wielkie
pożytki ra-
chunku prze-
ciwko zarzu-
tom pewnych
Autorów.

uważając ją iak gdyby była znana, wpadliśmy na większą liczbę nieznanych, które iednak za pomocą rachunku przywiedliśmy do tego stanu, iż wszystkie łatwym sposobem mogły być znoszone i równane z rzeczami znanemi. S tego stofunku wypadły nam wartości wszystkich nieznanych zamkniętych w zrównaniu, a w nich to, cośmy sobie do wynalezienia zadali. Rachunek więc rozebrał naszą kombinacya na swe że tak powiem elementa, i ugiął trudność do naszej mocy; bo to co trzeba było koniecznie razem ogarniać i równać, a czego dokazać było niepodobna; przywiodł do tego stanu, iż mogło być uważane i równane po części. Szliśmy więc tym co przedtem sposobem ale inaczej nakierowanym, w nim złączyliśmy początek Analityczny s początkiem ilości nieoznaczonych §. 9. do których zręcznego kierowania posłużyły nam własności zrównań dawniey odkryte. Droga ta wynalazków ledwo nam nie będzie w całym dziele powszechną; nie odmieni ona się tylko podług szczególnych każdego zadania okoliczności, które stofować będziemy z naybliżey związanemi poznanemi prawdami. Rachunek będzie iedyną silnią naszą do pokonania następujących trudności, wspierać on nas będzie oszczędzeniem rozumowań tych, które iuż raz były uczynione, bo ich zbytek równie zasłania prawdę wszystkim umyślom iak ią zasłania niedostatek umyślom niedołężnym. Na mięysce iednak tych oszczędzonych rozumowań podawać on będzie materyą nowych; które są właściwemi wypadkami świeżego wynalazku. Dostrzegliśmy iuż téy prawdy na początku tego rozdziału, ale ią ieszcze widzieć będziemy iasniey w następującym.

ROZDZIAŁ

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Rozwiązują się ZRÓWNANIA TRZECIEGO i CZWARTEGO STOPNIA z tłumaczeniem własności każdemu szczególnych: prawidła tych działań rostrząśnione podług nabytych początków, pokazują się niedostateczne, w nich zaś wszystkie przeszkody, które zatamowały postęp Geometrów w rozwiązaniu Zrównań wyższych Stopni; a ostatecznie ucieczki naszej niedoskonałości zostawione, wprowadzają nas w nowy rodzaj Rachunku, który Część drugą naszych badań zabiera.

§. XXVIII.

Zberzmy namprzód wszystkie trudności, które nam przeszkadzały do rozwiązania zrównań stopni wyższych od drugiego; i doświadczmy czyli te nie będą mogły być zwyciężone. Rozwiązaliśmy drugi stopień przez dopełnienie potęgi drugiej w funkcji ilości nieznaney, składający pierwszy człon zrównania. Dostrzegliśmy potem że chcąc się trzymać tej samej drogi w wyższych stopniach, potrzebaby mieć zrównanie, którego współ-czynniki byłyby w pewnym stosunku swęj potędze przyzwoitym, n.p. mając zrównanie 3go stopnia. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ i równając je s funkcją zupełną potęgi 3ciej $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = 0$, wypadnie warunek: $\frac{p}{3} = \sqrt{\frac{q}{3}}$

$= \sqrt[3]{r}$, który zamyka stosunek między ilościami znanymi potrzebny na to, aby s funkcji w zrównanie wchodzący mógł być zupełnie pierwiastek wyciągniony. Warunek ten uszczególnia się zmiennie

Rozwiązanie zrównania 3go stopnia.

zmiernie zrównanie, i sposób rozwiązania onęgo przy-
wzięcie tylko do przypadku zawartęgo w zrówna-
niach $\frac{p}{3} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{r}$. Oświeceni początkami grun-

tującemi doskonałość naszej nauki, nie możemy nie
uznać iakbyśmy mało tak szczególnym rozwiązani-
zrównań sposobem postąpili. Zebyśmy więc zrów-
wnanie podane zachowali przy całej swęy ogólno-
ści, potrzebaby nam niektóre terminy przenieść na
drugi członek zrównania, aby ocalić ilości znane przy
dawnęy swęy wartości, a dopiero potem dorzucić
te terminy, które do pełności potęgi brakują; ale tym
sposobem wprowadzemy ilość nieznaną z obydwóch
stron zrównania, które poty nie będzie rozwiązane,
póki z drugiey strony ilość nieznaną nie zniknie.
Ostatnia ta trudność, nie iest ciężką, abysmy ię nie
mieli użyciem §. 9. pokonać; pracuymy nad nią, ile
że przy nięy zrównanie nic z swęy ogólności nie
traci.

Właśność powszechną zrównań w §. 22. wyłożo-
ną uczy nas, że zrównanie zmniejszyć można iednym
terminem nie naruszyszcy ani iego związku, ani
ogólności. Użyimy ię teraz dla uproszczenia poda-
nego zrównania $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, położyszcy

$x = y - \frac{p}{3}$, otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} y^3 - \frac{1}{3}p^2 \cdot y - \frac{2}{27}p^3 \\ + q \cdot - \frac{1}{3}pq \\ + r \end{array} \right\} = 0$$

nazwawszy dla prościşzego wyrazu $-\frac{1}{3}p^2 + q = a$; $\frac{2}{27}p^3 - \frac{1}{3}pq + r = b$ będziem mieli zrównanie do rozwiąza-
nia pod wyrazem prościşszym

$$(A) \quad y^3 + ay + b = 0 \quad y^3 = -ay - b.$$

a wziawszy drugą niewiadomą z, skombinuymy ią z
y aby z iednego członka wypadła potęga trzecią zu-
pełną;

pełną, to jest: przydajmy z obydwóch stron terminy $3y^2z + 3yz^2 + z^3$; równanie najeź stanie się:

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = 3y^2z + 3yz^2 + z^3 - b \quad (B).$$

— ay
nową tą nieznaną z , daie nam prawo wprowadzenia takiej kondycji, takiej rozwiązanie równania potrzebuie. Pamiętajmy że to zależy od znieszenia nieznaney y w drugim członku równania, więc $3zy^2 + (3z^2 - a)y = 0$, czyli: $3zy + 3z^2 - a = 0$

$$y + z = \frac{a}{3z}, \quad (y+z)^3 = \frac{a^3}{27z^3}$$

Ale równanie (B) w tym nowém przypuszczeniu odmiennie się na

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 = z^3 - b, \quad \text{to jest: } (y+z)^3 = z^3 - b,$$

$$\text{zaczem } z^3 - b = \frac{a^3}{27z^3} \quad z^6 - bz^3 = \frac{a^3}{27} \quad (C).$$

Zrównanie 6go stopnia które podług §. 17. rozwiązać się może sposobem drugiego, i da nam wartość na z w funkcji a, b . Rozwiązawszy ię więc, podług prawideł §. 17. znajdziemy:

$$z^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3\right)} \quad z = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3\right)}\right)}.$$

Aże równanie podane (A) odmiennie się było na

$$(y+z)^3 = z^3 - b \quad y = -z + \sqrt[3]{(z^3 - b)}$$

włożywszy w to ostatnie za z, z^3 wartości dopiero odkryte otrzymamy:

$$y = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}b + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}b - \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3\right)}\right)}$$

gdzie nie położyliśmy tylko ieden znak przed znakami pierwiastkowemi drugiej potęgi, dla tego że na obadwa ten sam wypada wyraz: powtóre, znak odjemny przed cechą pierwiastkową przeniesliśmy za cechę; wiemy bowiem że znaki odjemne lub dodatne w pierwiastkach potęg nieparzystych mogą się kłaść przed, lub po znamieniu pierwiastkowym

i tak $\sqrt[3]{-a}$ iedno znaczy co $= -\sqrt[3]{a}$.

Znale-

Znaleźliśmy już jeden pierwiastek równania 3go stopnia, zostaje nam ich jeszcze dwa do wynalezienia. Pierwiastek jakiegokolwiek równania przywiedziony do zero, staie się jego dzielnikiem, i zniża się o jeden stopień. Potrzeba nam więc równanie podane rozdzielić przez pierwiastek dopiero znaleziony; ale że ilości niewymierne czyniłyby nam to działanie barzo zawikłane, przeto dla uproszczenia wyrazów nazwiemy:

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}\right)} = g \dots\dots$$

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{27}a^3}\right)} = h.$$

S czego wypadnie $gh = -\frac{1}{3}a$, $a = -3gh$; powtóre, $b = -g^3 - h^3$: włożywszy w równanie (A) za a, b , te wartości wyrażone przez funkcy g, h , odmienimy je na $y^3 - 3ghy - g^3 - h^3 = 0$, pierwiastek zaś wynaleziony na $y - g - h = 0$, przez który rozdzieliwszy toż równanie, zniżemy je do drugiego stopnia $y^2 + (g+h)y + h^2 + g^2 - gh = 0$, to ostatnie rozwiąższy podług prawideł w Roz: 2, podanych, znajdziemy inne dwa pierwiastki:

$$y = \frac{-(g+h) + (g-h)\sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-(g+h) - (g-h)\sqrt{-3}}{2}$$

do których przydawszy pierwszy, będziemy mieć trzy pierwiastki równania (A)

$$I. y = g+h \quad II. y = \frac{-(g+h) + (g-h)\sqrt{-3}}{2}$$

$$III. y = \frac{-(g+h) - (g-h)\sqrt{-3}}{2}$$

pierwszy z nich jest rzetelny, dwa ostatnie mogą być rzetelne lub urojone; będą rzetelne, jeżeli $(g-h)\sqrt{-3}$ jest funkcją rzetelną, to jest: jeżeli g, h będą urojone; będą zaś dwa ostatnie pierwiastki urojone, jeżeli $(g-h)\sqrt{-3}$ będzie funkcją urojoną: to jest jeżeli g, h będą rzetelne, podług §. 16. Będą zaś g, h zawsze

zawżę rzetelne, kiedy a jest ilością dodatnią, albo będąc odjemną, kiedy $\frac{b^2}{4} > \frac{a^3}{27}$. Zaczem każde zrównanie

3go stopnia pod wzórém $y^3 + ay + b = 0$ ma tylko jeden pierwiastek rzetelny, a dwa uroione; podobnie zrównanie pod wzórém $y^3 - ay + b = 0$ jest tegoż samego rodzaju kiedy $\frac{b^2}{4} > \frac{a^3}{27}$. Gdyby zaś by-

ło w tém ostatniém zrównaniu $\frac{b^2}{4} = \frac{a^3}{27}$, zrównanie 3go stopnia będzie na ten czas miało wszystkie pierwiastki rzetelne, z których dwa będą sobie równe. Wprowadzwszy bowiem to przypuszczenie, będzie $g = h$, a przeto wartości na y ,

$$y = 2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}} \quad y = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}} \quad y = -\sqrt[3]{\frac{b}{2}}$$

Zatrzymamy się teraz z uwagą nad zrównaniem $y^3 - ay + b = 0$ kiedy w niem $\frac{b^2}{4} < \frac{a^3}{27}$. W tém przypuszczeniu g, h , stają się uroionemi, a przeto funkcya $(g-h)\sqrt{-3}$ będzie rzetelną. Ze zaś g, h , znaydują się iezcze same we wszystkich trzech pierwiastkach, zdaie się na pozór że wszystkie te pierwiastki stają się uroionemi; w tym jednak przypadku wszystkie są rzetelne. Doświadczmy tego rachunkiem, który abyśmy tém łatwiej wykonali, skróemy iezcze raz nasze wyrazy: położmy na

mieysce $\frac{b}{2}, m$; na mieysce zaś $\sqrt{\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{27}a^3\right)}, k$; która jest podług terażniejszego przypuszczenia uroiona, położmy $n\sqrt{-1}$; będą więc także pierwiastki:

$$y = \sqrt[3]{(-m + n\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})}$$

$$y = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(-m + n\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} \right)$$

$$I \quad \quad \quad + \frac{\sqrt{-3}}{2}$$

$$+ \frac{\sqrt{-3}}{2} \left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})} \right).$$

$$y = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})} \right)$$

$$- \frac{\sqrt{-3}}{2} \left(\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(m+n\sqrt{-1})} \right).$$

każdy z tych terminów odwickławszy podług wzoru Newtona, otrzymamy tyle szeregów nieskończonych, ile się terminów niewymiernych znajdzie. W czem tę mieć należy uwagę, że, ponieważ wartość ilości nieznanej z takowych wyrazów nie może wypaść tylko bliska prawdy; starać się powinniśmy aby, to zbliżenie było największe i najkrótsze, to jest aby terminy szeregów pomykając się znacznie małały. Na ten koniec obierać należy za pierwszy termin w porządku potęg, ten, który jest większy. Jeżeli w teraźniejszym wyrazie pierwiastków $-m > n\sqrt{-1}$, m będzie pierwszym terminem dla tego, że w ciągu szeregu mając wykładnika odjemnego staie się mianownikiem ułamku; i uczyni go przez potęgi coraz barziej malejącym. Przyśtąpmy już do rachowania pierwszego pierwiastku, pamiętając w rachunku na różne potęgi $n\sqrt{-1}$, które tak następują: $n\sqrt{-1}$, $-n^2$, $-n^3\sqrt{-1}$, $+n^4$, $n^5\sqrt{-1}$, $-n^6$, i t. d.

$$\sqrt[3]{(-m+n\sqrt{-1})} = -m^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{n\sqrt{-1}}{m} \right)^{\frac{1}{3}} = -m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(1 - \frac{n\sqrt{-1}}{3m} + \frac{1}{9} \cdot \frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81} \cdot \frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} + \frac{10}{243} \cdot \frac{n^4}{m^4} - \frac{22}{729} \cdot \frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{i t. d.} \right)$$

$$-(m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -m^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{n\sqrt{-1}}{m} \right)^{\frac{1}{3}} = -m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(1 + \frac{n\sqrt{-1}}{3m} + \frac{1}{9} \cdot \frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81} \cdot \frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} + \frac{10}{243} \cdot \frac{n^4}{m^4} + \frac{22}{729} \cdot \frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{i t. d.} \right)$$

które

które dodawszy razem, wszystkie terminy uroione wypadną a wartość na y będzie daną w samych rzetelnych.

$$y = -2m^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{9} \frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243} \frac{n^4}{m^4} + \frac{154}{6561} \frac{n^6}{m^6} - \text{it.d.} \right)$$

działając podobnym sposobem w wyrazie innych pierwiastków, zginą namprzód wszystkie terminy uroione, a w samych funkcyach rzetelnych wypadną ięszcze następujące dwie wartości na y .

$$y = m^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{n}{3m} + \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} - \frac{22}{729} \frac{n^5}{m^5} + \text{i t. d.} \right) + m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{n\sqrt{3}}{3m} + \frac{5}{81} \frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{22}{729} \frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{it.d.} \right)$$

$$y = m^{\frac{1}{3}} \left(-\frac{n}{3m} + \frac{5}{81} \frac{n^3}{m^3} - \frac{22}{729} \frac{n^5}{m^5} + \text{i t. d.} \right) - m^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(-\frac{n\sqrt{3}}{3m} + \frac{5}{81} \frac{n^3\sqrt{-1}}{m^3} - \frac{22}{729} \frac{n^5\sqrt{-1}}{m^5} + \text{it.d.} \right)$$

Przyśzliśmy do wyrazów rzetelnych w trzech pierwiastkach równania $y^3 - ay + b = 0$, kiedy $\frac{1}{4}b^2 < \frac{1}{27}a^3$

ale te wyrazy nie kończąc się nigdy, muszą raczyć do przekonania nas, że pierwiastki są rzetelne, niż do odkrycia ściśey ich wartości. Takowy przypadek równań 3go stopnia wziął imię **nieprzywiedlnego** (*casus irreducibilis*), stąd, że naprzód prowadzi do wyrazu uroionego pierwiastków: ten wyraz, potem przerobiwszy, traflamy na szeregi bez końca, które nie mogą dać tylko wartości bliskie prawdy na ilość nieznaną. Przypadek nieprzywiedlny ma zawsze miejsce w równaniach 3go stopnia, ile razy te zamykają trzy pierwiastki rzetelne, nierówne i niewymiernie. Wszystkie kuzenia Geometrów do uniknięcia tego przypadku a zatem do rozwiązania zupełnego równań 3go stopnia były dotąd niepomyślne,

Przypadek w którym zrównanie 3go stopnia nie może być dokładnie rozwiązane,

Skaż wniesić należy, że ile razy w zrównaniach 3go stopnia trafiemy na ten przypadek, nie iśćśmy w stanie rozwiązać dokładnie takowego zrównania: że ostatnią ucieczką, która nam w tym razie została, zależy na szukaniu pierwiastków bliższych prawdy, przez uczynienie szeregów iak náybarziej malejącemi. Spōsoby na to podane barzo rozległego potrzebują tłumaczenia, które nas zatrudni niżej, pamiętamy tylko, że iśćśmy oczywiście potrzebą wciągnięni w ten nowy prawie rodzaj rachunku. Co się zaś tycze pierwiastków urojonych, o nich teraznijsze uwagi uczą nas, że te mogą się pokazać w wypadkach ostatnich rachunku, nie będąc do niego przywiązane: chcąc przeto rozsądzić czyli pierwiastki urojone koniecznie z naszego wypadku pytania lub nie? należy nam wprzód poczynić wszystkie przerebienia ostatnich zrównań zamykających urojone wyrazy; jeżeli je potrafiemy zmazać, znakiem jest, że terminy urojone przypadkiem tylko wzięły się w rachunek; jeżeli zaś po wszystkich odmianach zostaną, pokazują na ten czas niepodobieństwo tego czego szukamy: to niepodobieństwo znalesdż powinniśmy, w rozrządaniu uważnym wszystkich kondycyi naszego pytania.

Spōsób, który nas przywiódł do rozwiązania zrównań 3go stopnia zawisł od oznaczenia ilości nieznaney z , którąśmy wprowadzili. Ta dana nam była przez zrównanie 6go stopnia (C), skąd przyjdzie nie iednemu na myśl, że ponieważ zrównanie to mieć powinno sześć pierwiastków, otrzymamy sześć wartości na z , które włożone w trzy wartości na y , obecną 18 pierwiastków: coby zuynowało náywalniejszy początek o liczbie pierwiastków w każdym iakiegokolwiek stopnia zrównaniu. Sam tylko rachunek może nas s takowey trudności wyprowadzić, nie chcemy nim obciążać xiążki, bo ten tak jest łatwy, że każdy za pomocą ogólnie podanych początków może go sobie zrobić. Znajdzie zaś że wszystkie
sześć

ścić wartości na z , przywiodą go tylko do trzech wartości na y ; to jest kładąc którąkolwiek wartość na z , trafi na to samo wyrażenie y , a zatem natrzy tylko pierwiastki równania 3go stopnia.

Użyjmy w przykładzie wyłożonych prawideł na zrównanie 3go stopnia: wystawmy sobie, że pytanie jakie przywiodło nas do tego równania $x^3+6x^2+20x+124=0$, gdzie $p=6$, $q=20$, $r=124$; na wyrzucenie 2go terminu $x=y-2$; co zamięni równanie podane na $y^3+8y+100=0$, które ma tylko ieden pierwiastek rzetelny, a dwa urojone podług wyżej na to podanych znamień. $a=8$, $b=100$, włożywszy te wartości za a , b , w wyraż ogólny pierwiastku, wypadnie:

$$g=\sqrt[3]{(-50+\sqrt{\frac{67812}{27}})} \quad h=\sqrt[3]{(-50-\sqrt{\frac{67812}{27}})}$$

$$y=\sqrt[3]{(-50+\sqrt{\frac{67812}{27}})}+\sqrt[3]{(-50-\sqrt{\frac{67812}{27}})} \text{ czyli}$$

$$y=-4,15701 \text{ a zatem } x=-6,15701.$$

Obróćmy teraz uwagę na szczególne przypadki, które zrównanie $x^3+px^2+qx+r=b$ w sobie ogarnia. Przypuśćmy najprzód że $p=0$, $q=0$, zostanie się $x^3+r=0$, a w przerobioném równaniu będzie $a=0$, $b=r$ $y^3+r=0$: to jest $x=y$; iego więc pierwiastek-

$x=\sqrt[3]{-r}$; niech będzie $r=m^3$, $\sqrt[3]{-r}=-m$; wypadnie $x^3+m^3=0$, które rozdzieliwszy przez $x+m=0$, otrzymamy $x^2-mx+m^2=0$,

$$x=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{m^2}{4}-m^2\right)}=\frac{m}{2}(1\pm\sqrt{-3})$$

obydwa pierwiastki urojone; co właśnie wyciągniemy s trzech pierwiastków równania ogólnego. Więc zrównanie 3go stopnia $x^3+r=0$, ma tylko ieden pierwiastek rzetelny, a dwa urojone; zrównanie zaś $x^3-r=0$, ma wszystkie trzy pierwiastki rzetelne. Ocaliwszy p , q , a położywszy $r=0$; znajdziemy ie-

dén pierwiastek równy zero, i równanie zniży się do drugiego stopnia.

Skończmy zrównania 3go stopnia tą samą uwagą, którąśmy uczynili nad zrównaniami 2go pod §. 17; to jest, że prawidła dopiero odkryte rościagaia się do zrównań wyższych stopni zawartych w wzorze: $x^{3n} + px^{2n} + qx^n + r = 0$. uczyniwszy bowiem $x^n = y$, zrównanie to zamięni się na $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ iakie nas dotąd zatrudniało.

§. XXIX.

Rozwiązuje
się zrównanie
4go stopnia.

Dofyć nam jest przenieść pierwfze uwagi nad zrównaniem 3go stopnia do stopni wyższych, aby się przekonać, że te same trudności, które nam się na-famprzód pokazały w zrównaniach 3go stopnia, ma-ią miejsce i w stopniu czwartym. Nie potrzeba nam więc odstępować od tych początków, które nam do zwyciężenia tamtych przeszkód pomogły. Wszystkie iakiekolwiek zrównania 4go stopnia wystawic się mogą w tém ogólném - - $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, które nam wprzód potrzeba zgubieniem drugiego terminu uprościć, niżeli przytąpiemy do iego rozwią-

nia. Na ten koniec niech będzie $x = y - \frac{p}{4}$, §. 22;

zrównanie nasze zamięni się na:

$$\left. \begin{aligned} y^4 - \frac{3}{8}p^2y^2 + \frac{1}{8}p^3y - \frac{3}{256}p^4 \\ + q, - \frac{1}{2}pq + \frac{1}{16}p^2q \\ + r, - \frac{1}{4}pr \\ + s \end{aligned} \right\} = 0.$$

uczynimy dla skrócenia wyrazów $-\frac{3}{8}p^2 + q = a; \frac{1}{8}p^3$

$-\frac{1}{2}pq + r = b; -\frac{3}{256}p^4 + \frac{1}{16}p^2q - \frac{1}{4}pr + s = c$, a wy-

padnie

padnie zrównanie 4go stopnia do rozwiązania.

(α) - - $y^4 + ay^2 + by + c = 0$ - - - $y^4 = -ay^2 - by - c$
 przybierzmy sobie inną nieznaną z mającą nam służyć do wyrzucenia y z drugiej strony równania, i do dopełnienia potęgi w pierwszym członku. W tém dopełnieniu nie możnażby obrać niższej potęgi nad czwartą, któraby jednak ocaliła zupełnie y^4 ? Pamiętając na to cośmy w §. 17, mówili; dostrzeżemy łatwo, że zamiast potęgi czwartej możemy użyć drugiej, byleby wykładnik wtórego terminu był połową pierwszego: takim sposobem zrównanie 4go stopnia przywieziemy do 2go, nic nie odmiennwszy w jego ogólności; wszystkie bowiem terminy równania (α) jego ogólnosc wyrażające, będą się w zrównaniu tak przerobionem znaydować. Otrzymamy więc:

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z - a)y^2 - by - c + z^2 \quad - - - (\beta)$$

pierwszy członek tego równania jest zupełną potęgą drugą, przypuśćmy także że i drugi członek jest taką potęgą zupełną, ile że do tego przypuszczenia daie nam prawo nieznaną z . Zeby ten warunek mógł mieć miejsce, wystawmy sobie drugi równa-

$$\text{nią członek pod tym wzorem: } y^2 - \frac{b}{2z-a}y + \frac{z^2-c}{2z-a};$$

a ponieważ trzeci termin być powinien potęgą drugą połowy współczynnika drugiego, wypadá zrównanie warunkowe:

$$\frac{b^2}{4(2z-a)^2} = \frac{z^2-c}{2z-a}, \text{ czyli } - - - b^2 = 2\sqrt{(z^2-c)(2z-a)}$$

dla prostszego wyrazu uczynmy jeszcze $2z-a=u$, - -
 $z = \frac{u+a}{2}$ - - $z^2-c = \frac{(a+u)^2-4c}{4}$. wprowadziwszy te

wartości w równanie warunkowe, i oswoodziwszy je od znaku pierwiastkowego, otrzymamy:

$$u^3 + 2au^2 + (a^2 - 4c)u - b^2 = 0 \quad - - - (\gamma).$$

Zrównanie to zawiera náprzód w sobie tę kondycyę,

aby drugi członek równania (β) był zupełną potęgą drugą; powróć: służy do oznaczenia nieznaney z którąśmy wprowadzili: wciągając wartość za b przez warunek odkrytą w równanie (β), wypadnie $y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z - a)y^2 + 2\sqrt{[(z^2 - c)(2z - a)]}y + z^2 - c$ a wyciągnąwszy z obydwóch stron pierwiastek potęgi drugiey, będzie:

$y^2 + z = \pm (y\sqrt{(2z - a)} + \sqrt{(z^2 - c)})$, to jest kładąc za z , z^2 , jego wartości:

$$y^2 - y\sqrt{u} = -\frac{u+a}{2} - \frac{b}{2\sqrt{u}}; \quad y^2 + y\sqrt{u} = -\frac{u+a}{2} + \frac{b}{2\sqrt{u}}$$

dwa te równania rozwiązane podług prawideł Rozd.

2. dadzą cztery pierwiastki:

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{u}}{2} + \sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4} - \frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

$$(2) \quad y = \frac{\sqrt{u}}{2} - \sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4} - \frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

$$(3) \quad y = -\frac{\sqrt{u}}{2} + \sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4} + \frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

$$(4) \quad y = -\frac{\sqrt{u}}{2} - \sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4} + \frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$$

Pierwsze dwa mają te same ilości pod znakiem pierwiastkowym, i dwa ostatnie także te same, przeto jeżeli pierwszy pierwiastek będzie rzetelny lub uroiony, drugi także być musi; jeżeli trzeci pierwiastek będzie uroiony lub rzetelny, czwarty także będzie koniecznionie uroionym lub rzetelnym. Więc równanie 4go stopnia może mieć albo wszystkie pierwiastki uroione, albo wszystkie rzetelne, albo dwa rzetelne a dwa uroione. Jeżeli przystąpimy do rostrząsania, znamien każdego z tych przypadków, ułatwieć w przód należy trudność, która się tu nadarza.

Każdy z czterech pierwiastków równania (α) zamymka w sobie u , które dane jest przez równanie 3go stopnia

stopnia (γ). To rozwiązałwszy wypadną trzy wartości na u , które następnie kładzione w cztery wartości y , obiecuia dwanaście pierwiastków równania (α). Trudność, tak rzetelną wyciągniętą z własności równań godna całą naszą zatrzymać uwagę; bo w niej idzie o całość najpierwszych prawd gruntowych. Żeby te zostały nienaruszone, a równanie 4go stopnia (α) nie wydało więcej iak cztery pierwiastki, potrzebaby aby każda z trzech wartości na u , zostawiła cztery pierwiastki przy tym samym nieodmiennym wyrazie. Na ten koniec potrzebaby nam rozwiązać równanie (γ) podług prawideł §§. poprzedzających, i widzieć, czyli to co się zdaie być koniecznym wypadkiem pewnych początków, jest także wypadkiem doświadczenia i rachunku. Ale ten rachunek byłby niezmiernie długi, usiłujemy koniecznie przekonać się o tem drogą krótszą i łatwiejszą. Ponieważ tu nie idzie tylko o upewnienie się, czyli trzy wartości na u , zostawią pierwiastki równania (α) przy téj samej liczbie lub nie? dosyć nam jest za iakąkolwiek pomocą tak przerobić równanie (γ), aby z niego wyciągnąć trzy wartości na u , któreby je przywleśdź mogły do zero; nie należy nam więc być w tém dociekaniu troskliwemi o oznaczenie tego przez ilości znane, od czego znajomość pierwiastków zawisła: wystawmy sobie tylko cztery wartości na y , iak gdyby zawierały same ilości znane, i iakby nie do ich oznaczenia nie brakło, lubo w rzeczy samej iśćcąc w niem nie znamy u . Wziąwszy trzy litery m, n, s , uczynimy $\frac{\sqrt{u}}{a} = s; \sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4} - \frac{b}{2\sqrt{u}}\right)}$
 $= m; \sqrt{\left(-\frac{u+2a}{4} + \frac{b}{2\sqrt{u}}\right)} = n$, a cztery nasze pierwiastki wyrażą się króćcy: $y = s + m; y = s - m; y = -s + n; y = -s - n$; rozmnożywszy je przez się, otrzymamy równanie;

$$15 \quad y^4 - 2s^2.$$

ułatwia się trudność o liczbie pierwiastków.

$$\left. \begin{array}{l} y^4 - 2s^2y^2 - 2m^2s.y + s^4 \\ - m^2x + 2n^2s. - s^2n^2 \\ - n^2. - s^2m^2 \\ + m^2n^2 \end{array} \right\} = 0 \quad (A).$$

które iedno bydz powinno z zrównaniem (a), Równaiąc współ-czynniki tamtego s współ-czynnikiami tego, wypadá $a = -2s^2 - m^2 - n^2$; $b = 2n^2s - 2m^2s$, $c = s^4 - s^2n^2 - s^2m^2 + m^2n^2$; te wartości za a, b, c , włożymy w zrównanie (y) odmiéniemy ie na

$$\left. \begin{array}{l} u^3 - 4s^2u^2 + 8s^2m^2u - 4s^2(m^2 - n^2)^2 \\ - 2m^2 + 8s^2n^2 \\ - 2n^2 + m^4 \\ + n^4 \\ - 2m^2n^2 \end{array} \right\} = 0 \quad (G).$$

ponieważ ostatni termin zrównania (G) iest mnogiścią s wszystkich pierwiastków, rozebráwszy go na swoie mnożniki, znáydziemy ich trzy, $4s^2$, $(m+n)^2$, $(m-n)^2$, s których każdy włożony za u , przywiedzie zrównanie do zero. Użyć więc można tych mnożników iako pierwiastków zrównania (y), które nás nauczają o liczbie pierwiastków zrównania (a), i ułatwią zupełnie zachodzącą trudność. Biorąc bowiem $u = 4s^2$, $u = (m+n)^2$, $u = (m-n)^2$, po iednéy s tych wartości za u , i kładąc ie następnie w cztery wartości na y , zamiéniwszy także a, b, c , na funkcją s, m, n , za pomocą wyżej podanych na to zrównań; przejdziemy przez dwanaście kombinacyi, ale nie trafiemy w nich tylko na cztery różne pierwiastki, to iest: $y = s+m$; $y = s-m$; $y = -s+n$, $y = -s-n$, każdá wartość na u , naprowadzi nás na nie, a trzy wartości na u trzy razy nám ie tylko powtórzą, nie sprawiwszy innéy odmiany prócz téy, że pierwiastek na y który był n.p. wyciągniony z zrównania (1) położymy $u = 4s^2$; wypadnie potém z innégo zrównania kładąc $u = (m+n)^2$. Rachunek tak proſty i łatwy przekoná každégo o prawdzie którą tu ogłaszamy.

my. Skąd się wnosi oczywiście, że nam nie potrzeba rozwiązywać zupełnie zrównania (γ), aby z niego otrzymać trzy wartości na u , nie potrzeba nam bowiem z nich tylko jednej. Tę dostąpiwszy przez jaki szczególny sposób z wyżej podanych, odkryjemy natychmiast cztery pierwiastki zrównania podanego.

Istniećmy więc już więcej niż pewni, że zrównanie czwartego stopnia nie wyda więcej nad cztery pierwiastki: ale że te pierwiastki być mogą wszystkie rzeczywiste albo wszystkie urojone, albo dwa z nich rzeczywiste a dwa urojone, oprócz tego zrównanie (γ) będąc 3go stopnia, może w pewnych okolicznościach naprowadzić nas na przypadek nieprzywiedlny, który dawszy nam tylko wartości bliższe prawdy, przywiedzie nas do podobnych pierwiastków w zrównaniach 4go stopnia; dla tego zatrzymać nam się z uwagą należy nad rozróżnieniem wszystkich tych przypadków, i nad odkryciem znamion każdemu właściwych. Przekonani że zrównanie 4go stopnia zawisło całkiem od zrównania stopnia trzeciego, znieśmy je razem s sobą, i rozstrząśniemy wszystkie wypadki które s tęg zawiłości i porównania mogą wyniknąć. Położmy sobie naprzód przed oczy wszystkie kombinacye pierwiastków rzeczywistych i urojonych, które są właściwe zrównaniom 4go stopnia, to jest:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \begin{array}{l} y=s+m; \\ y=s-m; \\ y=-s+n; \\ y=-s-n; \end{array} & \text{II.} & \begin{array}{l} y=s+m\sqrt{-1}; \\ y=s-m\sqrt{-1}; \\ y=-s+n\sqrt{-1}; \\ y=-s-n\sqrt{-1}; \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{III.} & \begin{array}{l} y=s+m \\ y=s-m \\ y=-s+n\sqrt{-1} \\ y=-s-n\sqrt{-1} \end{array} & \text{IV.} & \begin{array}{l} y=s+m\sqrt{-1} \\ y=s-m\sqrt{-1} \\ y=-s+n \\ y=-s-n \end{array} \end{array}$$

do tych przypadków stosować winniśmy wartości na u , kładąc w nich za m , n , wartość taką, jaką się znajdzie w przypadku do którego przywieźniemy

Ic

nałzę

Gatunki pier-
wiastków wy-
ciaga się s po
równania sto-
pnia 1go s 4tym

nażę uwagę, to jest: w (I) m, n , brać należy za rzetelne; w (II), obydwa za uroione; w (III) m rzetelne, n uroione; w (IV) nakoniec m uroione, n rzetelne. Pamiętajmy zaś o tem, że ile razy w tych kombinacyach trafiemy na wszystkie trzy rzetelne wartości u , wpadamy na przypadek nieprzywiedlny, który w równaniu 3go stopnia má miejsce, kiedy to zamyka wszystkie pierwiastki rzetelne: na ten czas niedoskonałość prawideł 3go stopnia wpływać koniecznie będzie w stopień czwarty; i równanie 4go stopnia równie nie będzie mogło być zupełnie rozwiązane jak równanie 3go. Pierwiastki zaś rzetelne lub uroione wypadną koniecznie z rzetelnych lub uroionych wartości na s, m, n , które brać winniśmy s czterech wyłożonych kombinacyi pierwiastków czwartego stopnia.

Obróciwszy naprzód uwagę na (I), wypadają nam s, m, n , rzetelne, a zatem $u=4s^2$, $u=(m+n)^2$, $u=(m-n)^2$, wszystkie trzy rzetelne pierwiastki równania (3); więc iako w tym przypadku równanie 3go stopnia nie daie tylko pierwiastki bliskie prawdy, równanie 4go stopnia mając wszystkie cztery pierwiastki rzetelne, wpada na przypadek nieprzywiedlny, i nie możemy mieć w niem pierwiastków zupełnych. Rostrzaiając powtórę (II), gdzie wszystkie pierwiastki uroione, brać winniśmy $s, m\sqrt{-1}, n\sqrt{-1}$, a zatem $u=4s^2$, $u=(m\sqrt{-1} + n\sqrt{-1})^2 = -(n+m)^2$; $u=(m\sqrt{-1} - n\sqrt{-1})^2 = -(m-n)^2$, znowu wszystkie trzy rzetelne wartości na u ; więc równanie 4go stopnia mając wszystkie cztery pierwiastki uroione, jest znowu w przypadku nieprzywiedlnym, i nie możemy mieć jego pierwiastków w wyrazie skończonym.

Potrzenie: Przypadek (III). i (IV). daie $s, m, n\sqrt{-1}$; $s, m\sqrt{-1}, n$, kładąc je w wartości na u , otrzymamy w (III.) $u=4s^2$, $u=(m+n\sqrt{-1})^2=m^2+2mn\sqrt{-1}-n^2$; $u=(m-n\sqrt{-1})^2=m^2-2mn\sqrt{-1}-n^2$; w (IV). $u=4s^2$;

$u=4s^2$; $u=(m\sqrt{-1+n})^2=n^2+2mn\sqrt{-1-m^2}$; $u=(m\sqrt{-1-n})^2=n^2-2mn\sqrt{-1-m^2}$, w obydwóch rachach wypadała dwie wartości uroione na u , a jedna rzetelna; w takowym przypadku wiemy że równanie 3go stopnia ma pierwiastki w wyrazie skończonym; więc równanie 4go stopnia będzie mogło być rozwiązane zupełnie w ten czas, kiedy ma dwa pierwiastki uroione a dwa rzetelne.

Ponieważ równanie 4go stopnia jest w przypadku nieprzywiedlnym mając albo wszystkie pierwiastki rzetelne albo wszystkie uroione; iakże rozróżnić od siebie dwa te przypadki do których jest przywiązana niedoskonałość naszych prawideł? Cecha ta która te dwie rzeczy od siebie oddziela musi być koniecznie w równaniu (y) zawartą. Wróćmy się do wypadków rachunku na któreśmy natrafili w tych dwóch przypadkach.

Rozstrząsając I przykład, gdzie równanie 4go stopnia ma wszystkie pierwiastki rzetelne, trafiliśmy na trzy wartości u dodatnie; w II zaś przykładzie, gdzie zachodzą wszystkie pierwiastki uroione, otrzymaliśmy jedną wartość na u dodatnią, a dwie odjemne. Właśnie w równaniu (y) ostatni termin $-b^2$ będąc odjemnym nie mógł powstać tylko albo z wszystkich pierwiastków dodatnich albo jednego dodatniego a dwóch odjemnych podług własności ogólnych równań; więc jeżeli równanie (y) będzie miało trzy pierwiastki rzetelne i wszystkie dodatnie, równanie 4go stopnia będzie miało wszystkie pierwiastki zupełne. Jeżeli zaś w równaniu (y) z trzech rzetelnych pierwiastków jeden będzie dodatni a dwa odjemne; równanie czwartego stopnia będzie miało wszystkie pierwiastki uroione. W obydwóch zaś przypadkach te pierwiastki nie będą mogły być w wyrazie skończonym ogarnione; więc iako równania 3go stopnia nie umiemy dokładnie rozwiązać kiedy ma wszystkie pierwiastki rzetelne, tak podobnie

równania

zrównania 4go stopnia nie jesteśmy w stanie dostąpić pierwiastków zupełnych, kiedy te albo wszystkie są rzetelne albo wszystkie urojone.

Widzemy więc ściśły barzo związek, który zachodzi między zrównaniami niższych i wyższych stopni. Tén związek iak jest miły dla umysłu, tak się stał szkodliwy dla Geometrów, bo przeszkodził dalszym ich dociekaniom. Widząc bowiem że doskonałe rozwiązanie zrównań 4go stopnia zawisło koniecznie od doskonałego ich rozwiązania w trzecim stopniu; obrócili całe usiłowania swoje na tén ostatni, aby uniknąć przypadku nieprzywiedlnego i przyiść do odkrycia pierwiastków w wyrazie skończonym. Wszytkie kuszenia i usiłowania ich były dotąd daremne, bo iakiekolwiek przedsięwzięli drogi w rozwiązaniu zrównania mającego wszystkie pierwiastki rzetelne; nie trafili nigdy tylko na pierwiastki bliskie prawdy. Niedokładność ta prawideł pokazała się zaraz w stopniach wyższych; co ich ostrzegło, iż póty próżno było zapuszczać się w wyższe stopnie, poki zrównanie 3go stopnia nie będzie doskonałe, to jest w całej swej ogólności rozwiązane. Pewne bowiem szczególne przypadki, w którychby nam się mogło udać nie roszszerzać nauki, i nie są warte pracy, której rozylekłość rachunku wyciąga. Należało więc po wielu daremnych usiłowaniach ustąpić przeszkodom, a chwycić się zostawionych pomocy naszej niedoskonałości. Jeżeli nie możemy mieć zrównań wyższych stopni pierwiastków całe zupełnych; należało natężyć całe dociekania, aby się do nich náybarziej zbliżyć przez doskonałenie teoryi szeregów, która się stała w tén odstąpieniu prawdy ostatnią i náybieszczniejszą ucieczką do iey ścigania. Przywiedzeni i my jesteśmy potrzebą i barzo przyrodzonym porządkiem do nowego przedmiotu naszych badań, który nam całą część drugą zabierze. Nim do niey przyśpiemy zatrzymamy się ieszcze nad niektórymi uwagami wypadającymi z tego, cośmy dotąd mówili.

§ XXX.

§. XXX.

Właściwości naprzód ogólne zrównań nauczyły nas, że pierwiastki zrównania iakiegokolwiek stopnia zawierają w swoim wyrazie znaki pierwiastkowe swęgo stopnia i wszystkich innych stopni od siebie niższych. Doświadczenie potem utwierdziło nas w tęg prawdzie, kiedy po rozwiązaniu 2go, 3go i 4go stopnia zrównania, pierwiastki pokazały się w wyrazie barzo niewymiernym i zawikłanym. Ten znacznie by się zaiste uprosił, gdyby s funkcji pod znakami pierwiastkowemi zawartych mogły bydz pierwiastki wyciągnięone sposobem zupełnym. Wyciąganie zaś pierwiastków nie może się udać, tylko kiedy funkcya jest potęgą zupełną; ale iakże poznać czyli jest taką lub nie, w szrod niewymiernych wyrazów, które ią wiklą i zasłaniają prawo potęg zupełnych?

Sposób rozpoznawania potęg zupełnych w funkcjach niewymiernych.

S tęg uwagi nie możemy nie uczuć potrzeby szukania sposobu na rozeznanie potęg zupełnych w funkcjach pierwiastkowych. Każdą takową funkcją nie zawierającą tylko znaki pierwiastkowe 2go stopnia wyrazić ogólnie możemy przez $A \pm \sqrt{B}$, gdzie wzyśkie ilości wymierne znaczą się przez A ; wszystkie zaś niewymierne przez \sqrt{B} . Jeżeli $A \pm \sqrt{B}$ jest zupełną potęgą drugą, ię pierwiastek niech będzie wyrażony przez $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$; przeto $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{p \pm \sqrt{q}}$; $A \pm \sqrt{B} = p \pm 2\sqrt{pq} + q$; czyli (1) $A = p + q$; $\pm \sqrt{B} =$

$$\pm 2\sqrt{pq}. \quad (2) \quad B = 4pq \quad \therefore q = \frac{B}{4p} \quad \text{co włożywszy}$$

$$\text{w (1) wypadnie: } p^2 - Ap = -\frac{B}{4} \quad \therefore p = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$q = A - p = \frac{A \mp \sqrt{A^2 - B}}{2}; \quad \text{żeby więc } A \pm \sqrt{B}, \text{ było}$$

potęgą zupełną, potrzeba żeby p, q , były funkcjami wymiernemi; a przeto potrzeba żeby $A^2 - B$ było zupełną potęgą drugą. Iakóż w terażniejszym przypadku $A^2 - B = (p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2$. Chcąc więc doświadczyć

doświadczyć, czyli funkcya iaká pierwiastkowa która się zamyka pod wzorem $A \pm \sqrt{B}$ jest zupełną potęgą drugą, należy wiedzieć, czyli w niej $\sqrt{A^2 - B}$ jest funkcya wymierna; jeżeli nie jest, funkcya $A \pm \sqrt{B}$ nie będzie zupełną potęgą; jeżeli zaś $\sqrt{A^2 - B}$ jest pierwiastkiem zupełnym, funkcya $A + \sqrt{B}$ będzie miała za pierwiastek:

$$\sqrt{p + \sqrt{q}} = \pm \left[\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right].$$

funkcya zaś $A - \sqrt{B}$ mieć będzie pierwiastek:

$$\sqrt{p - \sqrt{q}} = \pm \left[\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \right].$$

Przykład. Niech będzie funkcya $5a^2 - b^2 \pm 4a\sqrt{a^2 - b^2}$, o której chcemy wiedzieć, czyli jest potęgą zupełną lub nie? $A = 5a^2 - b^2$; $\sqrt{B} = 4a\sqrt{a^2 - b^2}$; $A^2 - B = 9a^4 + 6a^2b^2 + b^4$, potęga zupełna funkcyi $3a^2 + b^2$; więc $p = 4a^2$; $q = a^2 - b^2$, przeto funkcya podana jest zupełną potęgą drugą, której pierwiastki są $\sqrt{p + \sqrt{q}} = \pm [2a \pm \sqrt{a^2 - b^2}]$. Tym sposobem znajdziemy że wyrażenie $28 + 10\sqrt{3}$ jest potęgą drugą, której pierwiastki są $\pm(5 + \sqrt{3})$.

Jeżeli s funkcyi $A + \sqrt{B}$ chcemy wyciągnąć pierwiastek potęgi trzeciej, potrzeba aby ten pierwiastek mógł być wystawiony pod takim wyrażem, któryby nie mógł wydadz iak tylko ieden niewymierny termin w potędze trzeciej. Przekonamy się zaś łatwo s krótkiey uwagi nad potęgami, że takowy pierwiastek nie może w sobie zawierać tylko ieden także niewymierny termin, i że wyrażenie jego właściwy jest $p + \sqrt{q}$; wprowadziwszy bowiem więcej terminów niewymiernych w pierwiastek n.p. $\sqrt{p + \sqrt{q}}$, potęga trzecia będzie mieć wszystkie terminy niewymierne, i nie będzie mogła być porównana s funkcya $A + \sqrt{B}$. Ale ten pierwiastek wyciągnięty s funkcyi $A + \sqrt{B}$ nie będzie on mógł zawierać znaku pierwiastkowego

fikowego potęgi trzeciej? Powinniśmy to bardzo łatwo pojąć, że takowy znak nie może się znajdować, chyba że sama potęga $A+\sqrt{B}$, jest rozmnożoną przez jaką ilość lub funkcją n.p. $(A+\sqrt{B})m$, a na ten czas pierwiastek także będzie zawierał funkcją niewymierną $\sqrt[3]{m}$, która równie będzie spólną wszystkim jego terminom; to jest: $(p+\sqrt{q})^3 \sqrt[3]{m}$.

Wróćmy się do pierwszego przypadku:

$$A+\sqrt{B}=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}.$$

równiając terminy niewymierne i wymierne s sobą, mamy

$$(1) \dots A=p^3+3pq \dots (2) \dots \sqrt{B}=(3p^2+q)\sqrt{q}$$

$$A^2-B=(p^2-q)^3 \dots \sqrt[3]{(A^2-B)}=p^2-q.$$

jeżeli więc $A+\sqrt{B}$ jest zupełną potęgą trzecią, powinno koniecznie A^2-B być też zupełną potęgą funkcji p^2-q : nazwawszy $p^2-q=n$; $q=p^2-n$, i włożywszy tę wartość za q w (1) otrzymamy zrównanie warunkowe:

$$4p^3-3np-A=0 \dots (L).$$

s którego należy wyciągnąć wartość na p , w wyrażeniu wymiernym: potrzebaby więc rozebrać zrównanie (L) na swe mnożniki wymierne, czego nie we wszystkich przypadkach potrafimy dokazać.

Jeżeli $A+\sqrt{B}$ będzie zupełną potęgą mimo to, że

A^2-B nią nie jest; na ten czas $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}$ jest rozmnożone przez spólną jaką ilość pierwiastkową trzeciej potęgi; rozdzieliwszy je więc przez tę ilość, wynajdziemy pierwiastek funkcji $A+\sqrt{B}$, i na ten czas A^2-B będzie zupełną potęgą trzecią.

Uważając na koniec $A\pm\sqrt{B}$ iako potęgę stopnia n , którego pierwiastek wyraża się przez $p\pm\sqrt{q}$, mamy na to zrównanie:

$$\begin{aligned} A+\sqrt{B} &= (p+\sqrt{q})^n \\ A-\sqrt{B} &= (p-\sqrt{q})^n \end{aligned}$$

$$\text{Mnogość} \quad A^2-B=(p^2-q)^n.$$

K

co nás

doświadczyć, czyli funkcją iaką pierwiastkową którą się zamyka pod wzorem $A \pm \sqrt{B}$ jest zupełną potęgą drugą, należy wiedzieć, czyli w niej $\sqrt{A^2 - B}$ jest funkcją wymierną; jeżeli nie jest, funkcją $A \pm \sqrt{B}$ nie będzie zupełną potęgą; jeżeli zaś $\sqrt{A^2 - B}$ jest pierwiastkiem zupełnym, funkcją $A \pm \sqrt{B}$ będzie miała za pierwiastek:

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \right)} + \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} \right)} \right].$$

funkcją zaś $A - \sqrt{B}$ mieć będzie pierwiastek:

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} \right)} - \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} \right)} \right].$$

Przykład. Niech będzie funkcją $5a^2 - b^2 \pm 4a\sqrt{a^2 - b^2}$, o której chcemy wiedzieć, czyli jest potęgą zupełną lub nie? $A = 5a^2 - b^2$; $\sqrt{B} = 4a\sqrt{a^2 - b^2}$; $A^2 - B = 9a^4 + 6a^2b^2 + b^4$, potęga zupełna funkcji $3a^2 + b^2$; więc $p = 4a^2$; $q = a^2 - b^2$, przeto funkcją podaną jest zupełną potęgą drugą, której pierwiastki są $\sqrt{p} + \sqrt{q} = \pm [2a \pm \sqrt{a^2 - b^2}]$. Tym sposobem znajdziemy, że wyrażenie $48 + 10\sqrt{3}$ jest potęgą drugą, której pierwiastki są $\pm(5 + \sqrt{3})$.

Jeżeli s funkcji $A \pm \sqrt{B}$ chcemy wyciągnąć pierwiastek potęgi trzeciej, potrzeba aby ten pierwiastek mógł być wystawiony pod takim wyrażeniem, któryby nie mógł wydać iak tylko jeden niewymierny termin w potęgę trzecią. Przekonamy się zaś łatwo s krótkiey uwagi nad potęgami, że takowy pierwiastek nie może w sobie zawierać tylko jeden także niewymierny termin, i że wyrażenie jego właściwy jest $p + \sqrt{q}$; wprowadziwszy bowiem więcej terminów niewymiernych w pierwiastek n.p. $\sqrt{p} + \sqrt{q}$, potęga trzecia będzie mieć wszystkie terminy niewymierne, i nie będzie mogła być porównana s funkcją $A \pm \sqrt{B}$. Ale ten pierwiastek wyciągnięty s funkcji $A \pm \sqrt{B}$ nie będzie on mógł zawierać znaku pierwiastkowego

fikowego potęgi trzeciej? Powinniśmy to bardzo łatwo pojąć, że takowy znak nie może się znajdować, chyba że sama potęga $A+\sqrt{B}$, jest rozmnożoną przez jaką ilość lub funkcją n.p. $(A+\sqrt{B})m$, a na ten czas pierwiastek także będzie zawierał funkcją niewymierną $\sqrt[m]{m}$, która równie będzie spólną wszystkim jego terminom; to jest: $(p+\sqrt{q})\sqrt[m]{m}$.

Wróćmy się do pierwszego przypadku:

$$A+\sqrt{B}=p^3+3p^2\sqrt{q}+3pq+q\sqrt{q}.$$

równając terminy niewymierne i wymierne s sobą, mamy

$$(1) \quad A=p^3+3pq \quad (2) \quad \sqrt{B}=(3p^2+q)\sqrt{q}$$

$$A^2-B=(p^2-q)^3 \quad \sqrt[3]{(A^2-B)}=p^2-q.$$

jeżeli więc $A+\sqrt{B}$ jest zupełną potęgą trzecią, powinno koniecznie A^2-B być tąż zupełną potęgą funkcji p^2-q : nazwawszy $p^2-q=n$; $q=p^2-n$, i włożywszy tę wartość za q w (1) otrzymamy zrównanie warunkowe:

$$4p^3-3np-A=0 \quad (L).$$

s którego należy wyciągnąć wartość na p , w wyrażeniu wymiernym: potrzebaby więc rozebrać zrównanie (L) na swe mnożniki wymierne, czego nie we wszystkich przypadkach potrafimy dokazać.

Jeżeli $A+\sqrt{B}$ będzie zupełną potęgą mimo to, że

A^2-B nią nie jest; na ten czas $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})}$ jest rozmnożone przez spólną jaką ilość pierwiastkową trzeciej potęgi; rozdzieliwszy je więc przez tę ilość, wyndziemy pierwiastek funkcji $A+\sqrt{B}$, i na ten czas A^2-B będzie zupełną potęgą trzecią.

Uważając na koniec $A\pm\sqrt{B}$ iako potęgę stopnia n , którego pierwiastek wyraża się przez $p\pm\sqrt{q}$, mamy na to zrównanie:

$$A+\sqrt{B}=(p+\sqrt{q})^n$$

$$A-\sqrt{B}=(p-\sqrt{q})^n$$

Mnożąc

$$A^2-B=(p^2-q)^n.$$

K

co nas

co nas ogólnie uczy, że jeżeli $A \pm \sqrt{B}$ má być zupełną potęgą n , potrzeba koniecznie aby funkcyja $A^2 - B$ była tąż samą potęgą $p^2 - q$: nazwawszy $p^2 - q$, k ; włożemy za $q = p^2 - k$ w równanie na A , i otrzymamy inne warunkowe stopnia n , s którym należy się tak obejść jak z równaniem (L) aby wynaleźć p .

Służy nam jeszcze ten sam sposób do wyciągania pierwiastków s funkcyi zamykających więcej terminów niewymiernych. Jeżeli te pierwiastki wyrażemy przez $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, albo przez $\sqrt{p + \sqrt{q} + \sqrt{r}}$; należy nam uważać, że potęga druga s takowego pierwiastku powstająca tyle będzie zawierać terminów niewymiernych, ile wypadnie mnogości z dwóch na raz pierwiastka terminów; znak bowiem pierwiastkowy nie zniknie, tylko w samych czystych potęgach każdego terminu pojedynczego: i tak n.p. trzy terminy, s których albo wszystkie albo dwa tylko pierwiastkowe, wydadzą koniecznie trzy terminy niewymierne w potęgę drugą: cztery terminy niewymierne pierwiastka, zrodzą sześć niewymiernych w potęgę: n terminów pierwiastka, s którychby albo żaden albo jeden tylko był wymierny, wydadzą $\frac{n(n-1)}{1.2}$

terminów niewymiernych w potęgę. Chcąc więc wystawić potęgę drugą pierwiastka $p + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, albo $\sqrt{p + \sqrt{q} + \sqrt{r}}$; wyrazić ją możemy przez $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = p + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr} + q + r$; więc ---
 $A = p + q + r$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{pq}$; --- $\sqrt{C} = 2\sqrt{pr}$; ---
 $\sqrt{D} = 2\sqrt{qr}$, s kąd wypada $q = \frac{B}{4p}$ --- $r = \frac{C}{4p}$ ---

$r = \frac{D}{4q}$, włożywszy za q, r , ich wartości w pier-

wszc, otrzymamy $A = p + \frac{B}{4p} + \frac{C}{4p}$; czyli ---

$$p^2 - Ap = -\frac{B+C}{4} \quad \text{---} \quad p = \frac{A + \sqrt{A^2 - B - C}}{2} \quad \text{skąd łatwo}$$

łatwo wynaleźć q , r . Jeżeli więc $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}$, jest zupełną potęgą drugą; p powinno być wymiernem, a zatem $A^2 - B - C$ być także powinno zupełną potęgą drugą. Takóż w teraźniejszym przykładzie $A^2 - B - C = (p + q + r)^2 - 4pq - 4pr = (p - q - r)^2$.

Oprócz tego warunku zostaje jeszcze jeden pochodzący z dwóch wartości różnych na r , to jest: $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$.

Zeby więc funkcya podana miała za pierwiastek $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, potrzeba naprzód, żeby $A^2 - B - C$ było zupełną potęgą drugą; powtóre, żeby

$\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$. Zobaczymy to w przykładzie.

Niech będzie wyraz liczebny $28 + \sqrt{320} + \sqrt{448} + \sqrt{140}$, o którym chcemy wiedzieć, czyli jest zupełną potęgą drugą, i jaki jest jego pierwiastek? W nim $A = 28$, $B = 320$; $C = 448$, $D = 140$ -- $A^2 - B - C = 16$,

którego pierwiastek 4; więc $p = \frac{A + \sqrt{A^2 - B - C}}{2}$

$= 16$, $q = \frac{B}{4p} = 5$, $r = \frac{C}{4p} = 7$; $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$

czyli $7 = 7$, więc pierwiastek podanego wyrazu jest $\pm(4 + \sqrt{5} + \sqrt{7})$.

Należy nam tu uczynić iedną przestrożę, że równania przykład iaki podany z wzorem ogólnym, może się czasem nie udać która kondycya w iednym nazwisku, ale się uda w nazwisku innem, i dla tego jeżeli z nadanych wartości A, B, C, D , nie wypadną warunki właściwe pytaniu, nie należy w przód stanowić, że funkcya podana nie ma pierwiastku, póki nie przedydziemy przez wszystkie odmiany które wypaść mogą z różnych nadanych wartości ilościom pierwiastkowym: i tak n. p. mając wyraz liczebny $12 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$ nie wypadną nam obydwie warunki nazwawszy $A = 10$,

$B = 24$, $C = 40$, $D = 60$, ponieważ na $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$ otrzy

mamy $s=80$: ale jeżeli nazwiemy $A=10, B=40, C=60, D=24$, obydwie kondycje będą miały miéysce, i pierwiastek podanego wyrazu będzie: $\pm(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Mając do rozpoznania funkcję podaną, której obydwa terminy byłyby pierwiastkowe: n.p. $\sqrt{A}+\sqrt{B}$. potrzebamy nam dobrać takiego wyrazu w pierwiastku, któryby w drugiey potędze wydał dwa tylko terminy, obydwa zaś z znakiem pierwiastkowym. Takowy pierwiastek wyrazi się barzo dobrze przez $\sqrt{(p\sqrt{r})}+\sqrt{(q\sqrt{r})}$; mając bowiem iednego mnożnika spólnego, dwa terminy złączą się razem; i potęgą drugą takowego pierwiastku będzie: $(p+q)\sqrt{r}+2\sqrt{pqr}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$, a zatem $(p+q)^2r=A, - - 4pqr=B - - A-B=(p+q)^2r-4pqr=(p-q)^2r$. jeżeli więc $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ma być zupełną potęgą drugą, powinno $A-B$ być potęgą drugą kilkokrotną, czyli rozmnożoną przez jaką liczbę r . Dwa stąd otrzymane zrównania

$$\begin{aligned}\sqrt{(A-B)} &= p\sqrt{r} - q\sqrt{r}. \\ +\sqrt{A} &= p\sqrt{r} + q\sqrt{r}.\end{aligned}$$

dodając lub odcinając od siebie; dostapiemy

$$\begin{aligned}p\sqrt{r} &= \frac{\sqrt{A} + \sqrt{(A-B)}}{2} \\ q\sqrt{r} &= \frac{\sqrt{A} - \sqrt{(A-B)}}{2}\end{aligned}$$

s których powstaie pierwiastek funkcyi $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{(p\sqrt{r})} + \sqrt{(q\sqrt{r})} &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{A} + \sqrt{(A-B)}}{2}\right)} + \\ &\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A} - \sqrt{(A-B)}}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Użycie tego samego sposobu w funkcjach uroionych,

Doświadczmy ieszcze tego sposobu w funkcjach uroionych. Wystawmy sobie funkcję uroioną zamykającą znaki pierwiastkowe samey potęgi drugiey, w wzorze ogólnym $A+\sqrt{-B}$. gdzie B jest koniecznie dodatnie: a stółując do niey te same uwagi, któreśmy uczynili nad $A+\sqrt{B}$, wynaydziemy, że

$$\sqrt{(A+\sqrt{-B})}$$

$$\sqrt{A+\sqrt{-B}} = \pm \left[\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{A^2+B}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{A^2+B}}{2}\right)} \right] \dots (M).$$

jeżeli więc funkcya uroioną $A+\sqrt{-B}$ jest zupełną potęgą drugą; musi koniecznie A^2+B być takąż potęgą; pierwszy termin tego pierwiastku

$\sqrt{\left(\frac{A+\sqrt{A^2+B}}{2}\right)}$, jest funkcją rzetelną, którą możemy

wyrazić przez a ; drugi termin

$\sqrt{\left(\frac{A-\sqrt{A^2+B}}{2}\right)}$ jest uroiony; ponieważ $A < \sqrt{A^2+B}$;

wyrazić on się może przez $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{A^2+B}-A}{2}\right)} \cdot \sqrt{-1}$

$= b\sqrt{-1}$, gdzie b znaczy ilość rzetelną. Pierwiastek więc uroioney funkcyi wyrazić się może przez $a+b\sqrt{-1}$, gdzie a, b , są ilościami koniecznie rzetelnymi.

Mając sobie podaną funkcją uroioną $\sqrt[4]{\sqrt{-C}} = \sqrt[4]{-C}$ a równając ją z wzorem $A+\sqrt{-B}$, będzie $A=0$;

$B=C$, a wartość $\sqrt[4]{-C}$ z zrównania (M) wyciągając, znajdziemy $\sqrt[4]{-C} = \sqrt[4]{\left(\frac{C}{4} \cdot (1+\sqrt{-1})\right)}$, co także

wyrazić możemy przez $a+b\sqrt{-1}$ uczyniwszy $a = \sqrt[4]{\frac{C}{4}} = b$.

Niech będą funkcy: $\sqrt[4]{(\sqrt[4]{-C})} = \sqrt[8]{-C}$; $\sqrt[8]{\sqrt[4]{-C}} =$

$\sqrt[16]{-C}$, i t. d. ponieważ $\sqrt[4]{-C}$ już przywiedliśmy do

wyrazu $a+b\sqrt{-1}$, będzie $\sqrt[8]{-C} = \sqrt[8]{(a+b\sqrt{-1})}$

$= \pm \sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)} \sqrt{-1}$

który także należy do wzoru $a+b\sqrt{-1}$, wzięwszy

$\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$ za a ; $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right)}$, za b ;

K₃

tym

tym sposobem postępując sobie przekonamy się, że wszystkie funkcyje uroione, mające wykładnik $2k$; k znacząc liczbę parzystą, przywiedzione być mogą do wyrazu $a+b\sqrt{-1}$.

Jeżeli k będzie liczbą nieparzystą, $2k$ będzie zawsze parzystą; ale że wykładniki parzyste 6, 10, 14, 18, i t. d. uważać się mogą jako powstające z rozmnożenia liczby nieparzystej przez parzystą; funkcyje uroione, s takimi wykładnikami $\sqrt[6]{-C}$, $\sqrt[10]{-C}$, i t. d. będą równe $\sqrt[3]{\sqrt[2]{-C}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[2]{-C}}$, i t. d. Aże $\sqrt[3]{-C} = -\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[5]{-C} = -\sqrt[5]{C}$, $\sqrt[7]{-C} = -\sqrt[7]{C}$ i t. d. nazwawszy $\sqrt[3]{C}$, $\sqrt[5]{C}$, $\sqrt[7]{C}$, b^2 ; wyrazy uroione $\sqrt[6]{-C}$, $\sqrt[10]{-C}$, i t. d. jeszcze należąc będą do wzoru ogólnego $a+b\sqrt{-1}$. Wnieśmy więc że wszystkie funkcyje uroione z wykładnikiem $2k$, k będąc parzystą lub nie parzystą liczbą, wyrazić się mogą przez wzór ogólny $a+b\sqrt{-1}$.

Jeżeli funkcyja podana $A+\sqrt{-B}$ będzie potęgą nie parzystą, zamykając pierwiastki częścią rzetelną, a częścią uroioną, obeysdź się z nią będziemy mogli podług tych samych prawideł, które nam służyły na $A+\sqrt{B}$. Wszakże pierwiastki nawet potęg nieparzystych wyraziliśmy przez $p+\sqrt{q}$; więc jeżeli teraz wyrażemy potęgę iakąkolwiek nieparzystą przez $A+\sqrt{-B}$, pierwiastek iey będzie $p+\sqrt{q}$ ogarniający razem wartości rzetelne i uroione; a zatem funkcyje nawet które w potęgach nieparzystych zawierają pierwiastki rzetelne zmieszane z uroionami, przywiodą się do wzoru $a+b\sqrt{-1}$. Wystawmy sobie n.p. trzecią potęgę w funkeyi $A+\sqrt{-B}$ której pierwiastek wyrażmy przez $r+s$, pamiętając że s zamyka w sobie znak pierwiastkowy drugiey potęgi. Będzie więc $A+\sqrt{-B} = r^3 + 3rs + 3rs^2 + s^3$; ponieważ znak pierwiastkowy nie mógł zniknąć w potęgach nieparzystych; równamy z $\sqrt{-B}$ wszystkie terminy, gdzie s jest

jest wymiaru nieparzystego, wszystkie zaś inne z A , otrzymamy $r^3 + 3rs^2 = A$; $3r^2s + s^3 = (3r^2 + s^2)s = \sqrt{-B}$. $B = -(3r^2 + s^2)^2 s^2$: dwa te równania złączone s sobą dadzą wartość na r, s , tak, aby $A + \sqrt{-B}$ było zupełną potęgą trzecią mającą za pierwiastek $r + s$. Aże z wyżej już wyłożonych warunków $A^2 + B$ być powinno zupełną potęgą trzecią, jeżeli nią jest $A + \sqrt{-B}$, otrzymamy naprzód s terazniejszych na

A, B , wartości, $\sqrt[3]{(A^2 + B)} = r^2 - s^2$: powtóre otrzymamy równanie warunkowe któreśmy wyżej nazwali (L) $4r^3 - 3nr - A = 0$, gdzie $n = r^2 - s^2$.

To równanie mając drugi termin odjemny, będzie miało wszystkie trzy pierwiastki rzetelne, s których jeden wyrazić możemy przez a : wypadnie powtóre

$$s^2 = \frac{-B}{(3r^2 + s^2)^2}, \text{ a włożywszy za } s^2, \text{ jego wartość}$$

$$r^2 - n, s^2 = \frac{-B}{(4r^2 - n)^2} \text{ wartość koniecznie odjemną, po-}$$

nieważ B w terazniejszym przypuszczeniu jest koniecznie dodatnem; mianownik także z natury swo-

$$\text{iey dodatnym, więc } s = \frac{\sqrt{B}}{4r^2 - n}, \sqrt{-1}. \text{ co się wy-}$$

$$\text{razić może przez } b\sqrt{-1}, \text{ biorąc za } b \text{ ilość rzetelną}$$

$$\frac{\sqrt{B}}{4r^2 - n}$$

S. tych więc wszystkich przypadków wypada prawdziwa ogólna: że wszystkie funkcye, ułożone wyrazić się mogą przez wzór $a + b\sqrt{-1}$. Jeżeli rościagniemy dalej użycie dopiero wyłożonej prawdy, przychodzi nam tu uczynić króciutką uwagę o równaniach 3go stopnia. Wiemy, że ile razy te zamykają wszystkie pierwiastki rzetelne, prowadzą nas do przypadku nieprzywiedlnego, w którym pierwiastki pokazują się pod wyrazem ułożonym prowadzącym nas do szeregow niekończonych.

Ale jeżeli iaki pierwiastek będzie przy swoim uroionym wyrazie zupełną potęgą trzecią, wyciągnąwszy z niego pierwiastek trzeciej potęgi sposobem teraz wyłożonym, przyjdziemy do wyrazu skończonego trzech rzetelnych wartości na ilość nieznaną. n. p. Mając zrównanie $x^3 - 6x + 4 = 0$, i rozwiązawszy je podług

§. 28. otrzymamy $x = \sqrt[3]{(-2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-2 - 2\sqrt{-1})}$, chcąc wiedzieć czyli drugi członek tego zrównania jest zupełną potęgą trzecią, i wynaléżdź jego pierwiastek, równam go s funkcją $A \pm \sqrt{B}$, będzie więc $A = -2$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{-1}$ $A^2 = 4$, $B = -4$

$A^2 - B = 8$, którego pierwiastek $\sqrt{A^2 - B} = 2\sqrt{2} = n$; kładę tę wartość za n w zrównanie warunkowe (L), i staie się $4p^3 - 6p + 2 = 0$. które jest rozdzielné przez $p - 1 = 0$: więc $p = 1$, $q = p^2 - n = -1$, a zatem pierwiastek

$p + \sqrt{q} = \sqrt[3]{(-2 + 2\sqrt{-1})} = 1 + \sqrt{-1}$. Tym sposobem

znaydziemy że $\sqrt[3]{(-2 - 2\sqrt{-1})} = 1 - \sqrt{-1}$; przeto $x = 1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1} = 2$: rozdzieliwszy zrównanie podane przez $x - 2$, zniżemy je o ieden stopień $x^2 + 2x - 2 = 0$, którego pierwiastki rzetelne są $x = -1 + \sqrt{3}$, $x = -1 - \sqrt{3}$. Zrównanie więc 3go stopnia chociaż będzie w przypadku nieprzywiedlnym, może jednak mieć pierwiastki wyrażone sposobem skończonym, ale tylko w ten czas, kiedy jego wartości są zupełnemi potęgami trzecimi, co będąc tylko przypadkiem szczególnym i rzadkim, dowodzi ieszcze niedoskonałość prawideł, które nam w téj mierze służą.

§. XXXI.

Ogólny sposób rozeznania pierwiastków uroionych w zrównaniu.

Dofzedłszy wyrazu ogólnego pierwiastków uroionych w zrównaniu lub funkcyi, wypadá nam tu barzo porządne jego użycie, służące do rozeznania czyli zrównanie iakiegokolwiek stopnia má pierwiastki uroione lub nie? każdy bowiem dotąd stopień zrównania potrzebował od nás szczególnych sposobów

na rozpoznanie pierwiastków rzetelnych lub uroio-
nych któreśmy dopiero rozwiązwfzy zrównanie, wy-
ciągali. Mając zaś wyraz ogólny zrównania iakiego-
kolwiek stopnia $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + rx^{m-3} + \dots + k = 0$, i wyraz ogólny pierwiastku uroionego $x = a - b\sqrt{-1} = 0$, możemy z dwóch tych ogólnych wyra-
zów wyciągnąć trzeci, który będzie samé pierwiastki
uroione w zrównaniu oznaczał. Trzymámy się tyl-
ko w tém dociekaniu drogi Analityczney, która nás
inż do tak wielu prawd szczęśliwie przywiodła; to
jest: uważámy rzecz nieznana iak gdyby była zna-
na: a wiążąc warunki pytania z ogólnémi początkami
starámy się przyiść do prostych zrównań i stó-
funków, s którychby wypaść mogły wartości rze-
czy nieznaných.

Každy pierwiastek uroiony w zrównaniu wyráża
się przez $x = a - b\sqrt{-1} = 0$, tak iako każdy mnożnik
uroiony w funkcyi przez $x = a - b\sqrt{-1}$; ale że w
tym wyrazie b koniecznie powinno byđ ilością lub
funkcją rzetelną; albo będąc uroioném, nie powinno
byđ rozdzielne przez $\sqrt{-1}$; albowiem termin $b\sqrt{-1}$
nie mógł powstać tylko z zrównania rozwiązanego,
które zawierało b z wykładnikiem parzystym, n. p.
 b^2 . To b^2 albo jest samo rzetelném albo uroioném;
w pierwszym przypadku dámy że wartości różne
 b^2 są m, m' i t. d. tak dalece że $b = \sqrt{m}, b = \sqrt{m'}$,

czyli $b = \frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-1}}, b = \frac{\sqrt{-m'}}{\sqrt{-1}}$; wyraz ogólny pierwiastku

uroionego daie $x = a + b\sqrt{-1}$, czyli $x = a + \sqrt{-m}$,
 $x = a + \sqrt{-m'}$, gdzie widzemy, że potrzeba, aby
 $-m, -m'$ były koniecznie dodatné iezeli x má
byđ rzetelném, to jest potrzeba aby b było fun-
kcją uroioną; i przeciwnie żeby x było uroioném,
potrzeba aby $-m, -m'$ było odjemném to jest, aby
 b było rzetelném. Iezeli zaś samo b^2 jest uroioném,

n. p. $b^2 = \frac{m}{\sqrt{-1}}, b = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{-1}}, x = a + \frac{\sqrt{-m}}{\sqrt{-1}}$, żeby

K5 więc

więc x było uroionem w ten czas, kiedy b jest także uroionem, potrzeba aby b nie było całkiem rozdzielne przez $\sqrt{-1}$.

Pierwiastki rzetelne lub uroione w zrównaniu są to wartości rzetelne lub uroione na x , te zaś wartości x zawisły od wartości b , idzie za tem, że chcąc się dowiedzieć czyli zrównanie podane ma pierwiastki uroione lub nie? należy w nie za x i jego potęgi włożyć wartość uroioną $x = a + b\sqrt{-1}$; a tak zamienivszy zrównanie podane na inne między a , b , i ilościami znanemi; należy rostrząsnąć wszystkie stąd powstać mogące wartości na b , s tych sadzić o wartościach x , a zatem o pierwiastkach zrównania podanego. Ale a , b , stają się ilościami nieznanemi wprowadzonemi na miejsce x , s kądże ich oznaczyć wartości lub związek? Chcąc na to odpowiedzieć uwážmy; że kładąc w zrównanie podane za x , $a + b\sqrt{-1}$, przerobiemy je na inne takie, w którym będą terminy rzetelne i uroione; aże zrównanie przerobione iedno byđz powinno s podanem; wszystkie terminy uroione należy zniszczyć, to jest uczynić zbiór tych wszystkich, które są rozmnożone przez $\sqrt{-1}$, równy zero. A tak otrzymamy dwa zrównania, które nazwiemy *Wypadkowemi*: z nich iedno służyć będzie na oznaczenie a , drugie na b . Aże pierwiastki rzetelne lub uroione w zrównaniu zawisły od pewnych wartości i sfunków ilości znanych; potrzeba nám z równań wypadkowych prócz a , b , wyciągnąć związek między ilościami znanemi na pierwiastki uroione. Nadávszy więc podług upodobania pewną jaką wartość na a , wyciągniemy z iednego zrównania wypadkowego odpowiadającą wartość na b ; te zaś dwie wartości włożywszy w drugie zrównanie wypadkowe, odkryiemy związek między ilościami znanemi wyrażający potrzebne warunki, aby zrównanie podane miało pierwiastki uroione.

Takowe warunki w ilościach znanych moglibyśmy otrzymać przez wartość na a , b wyciągnioną z związku

ku zawartego w równaniach wypadkowych; ale na to trzeba by nam rozwiązać obydwie te równania, przez co dociekanią nasze skończyłyby się na tych tylko równaniach, które teraz jesteśmy w stanie rozwiązać. Trzeba nam więc prześłać raczej na pierwszym sposobie iako rozleglejszym i niezawisłym od rozwiązania równań. Zebyśmy tém mocniej uczuli jego użycie, nie zgubmy tego z myśli, że kiedy z równań wypadkowych otrzymamy na b wartość rzetelną; równanie podane będzie miało pierwiastki uroione: kiedy zaś b będzie uroionem; równanie zamyka pierwiastki rzetelne. Wystawmy sobie teraz, że równania wypadkowe nie tylko nas nauczają kiedy b jest rzetelnem lub uroionem, ale nam nawet oznaczają moment, kiedy przechodzi z wartości rzetelnej na uroioną lub przeciwnie; oddzieliwszy tém przeysciem klasę pierwiastków rzetelnych od klasy uroionych, rozwiązanie równania byłoby nam w tym razie niepotrzebne, bo sama uwaga nad współczynnikami nauczyłaby nas o gatunku pierwiastków. Té wszystkie rozumowania daleko się oczywiście pokazaż w rachunku. Niech będzie równanie podane, s którego dla łatwiejszego rachunku pozbyliśmy się 2go terminu:

$$x^m + px^{m-2} + qx^{m-3} + rx^{m-4} + \text{i t. d.} + k = 0,$$

kładąc w niem za x , $a + b\sqrt{-1}$; wypadnie

$$x^m = a^m + ma^{m-1}b\sqrt{-1} - m \frac{(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 - m.$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \sqrt{-1} + \text{i t. d.} \pm b^m \sqrt{-1}^m$$

$$+ px^{m-2} = pa^{m-2} + p \frac{(m-2)}{1} a^{m-3} b \sqrt{-1} - p \frac{(m-2)}{1}.$$

$$\frac{(m-3)}{2} a^{m-4} b^2 - p \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-5} b^3 \sqrt{-1}$$

$$+ \text{i t. d.} \pm p b^{m-2} \sqrt{-1}^{m-2}$$

$$+ qx^{m-3} = qa^{m-3} + \text{i t. d.} \pm q b^{m-3} \sqrt{-1}^{m-3}$$

$$+ \text{i t. d.} + k = 0.$$

K6

Wykładnik

Wykładnik m byż może parzysty albo nieparzysty. Jeżeli jest parzystym, $\sqrt{(-1)^m} = \pm 1$ to samo mówić należy o $\sqrt{(-1)^{m-2}}, \sqrt{(-1)^{m-4}}$ i t. d. najwyższą więc potęgą b mnożoną przez $\sqrt{-1}$ w x^m , będzie b^{m-1} ; w x^{m-2} , b^{m-3} ; i t. d. Stych wszystkich terminów powstanie jedno równanie warunkowe (A), które zamykając we wszystkich terminach b , będzie mogło przez nie byż rozdzielone, a przeto potęgi b w tem równaniu będą $b^{m-2}, b^{m-4}, b^{m-6}$, i t. d. Równanie więc służące na oznaczenie b będzie o dwa stopnie niższe od podanego, i jeżeli jeszcze szukać będziemy podwójnych wartości na b , dla tego że pierwiastki uroione są zawsze w liczbie parzystej, trudność ną-
fza w szukaniu b będzie stopnia $\frac{m-2}{2}$. W drugim

zrównaniu warunkowem, które nazywam (B) będą potęgi b : b^m, b^{m-2}, b^{m-4} i t. d. a zatem trudność stopnia $\frac{m}{2}$.

Jeżeli zaś m jest nieparzyste $\sqrt{(-1)^m}, \sqrt{(-1)^{m-2}}, \sqrt{(-1)^{m-4}}$, i t. d. będąc równe $\pm 1, \sqrt{-1}$; ilości zaś $\sqrt{(-1)^{m-3}}, \sqrt{(-1)^{m-5}}$, i t. d. $= \pm 1$. Równanie więc wypadkowe (A) będąc całe rozdzielne przez b będzie zawierało potęgi $b^{m-1}, b^{m-3}, b^{m-5}$, i t. d. i nie zniży się tylko o jeden stopień, w drugim także zrównaniu warunkowem, b znajdować się będzie w potęgach b^{m-1}, b^{m-3} i t. d. a zatem trudność w obu-
dwóch będzie jednego stopnia co do b . W pierwszym i drugim przypadku b zawsze się znajduje w stopniu parzystym; co właśnie zgadza się z naturą pierwiastków uroionych. Przytósłomy te wszystkie uwagi

Stórowanie po
przedzających
teorii do zró-
wnań 3go sto-
pnia.

do równań 3go stopnia: pozbywszy się 2go termi-
nu, równanie podane będzie:
 $x^3 + px + q = 0$. kładąc za $x, a + b\sqrt{-1}$; przerobiemy
ie na

$$\left. \begin{aligned} & a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} \\ & - 3ab^2 - b^3\sqrt{-1} \\ & + ap + bp\sqrt{-1} \\ & + q \end{aligned} \right\} = 0. \text{ s którego powstają dwa} \\ \text{zrównania wypadkowe:} \\ \text{(B)}$$

(B) $-a^3 + (p - 3b^2)a + q = 0$, (A) $-b^3 - 3a^2 - p = 0$.
 Włożywszy za b^2 wartość z (A) w równanie (B);
 otrzymamy równanie jednego stopnia s podanem $-$
 (C) $2a(4a^2 + p) - q = 0$: od rozwiązania iego, zawi-
 sto rozwiązanie równania podanego, i dla tego na-
 zwać je możemy *Rozwiązującym*.

Rostrząsnijmy teraz różne wartości na b które wy-
 niknąć mogą z różnych przypuszczeń wciągnionych
 w równania wypadkowe. Naprzód (A) daie $b =$
 $\pm\sqrt{3a^2 + p}$, uczyniwszy $a = 0$, wypada z (B) $q = 0$.
 $b = \pm\sqrt{p}$. Jeżeli p jest dodatnem, b będzie konie-
 cznie rzetelnem, i równanie podane będzie mieć
 dwa pierwiastki uroione, co się zgadza z doświad-
 czeniem rachunku: jeżeli zaś p będzie odjemnem, b
 będzie uroionem, i równanie podane ma pierwiastki
 rzetelne.

Niech a nie będzie zero; $b = \sqrt{3a^2 + p}$: jeżeli p
 jest dodatnem, iakiemkolwiek będzie a zawsze b bę-
 dzie rzetelnem, i równanie podane będzie miało
 wszystkie pierwiastki uroione; wszystkie bowiem kom-
 binacye między a , b , ogarniają w sobie wszystkie
 kombinacye między p , q ; więc iakikolwiek zaydzie
 stosunek między p , q , byleby p było dodatnem, rō-
 wnanie podane będzie miało koniecznie dwa pier-
 wiastki uroione.

Jeżeli p jest odjemnem, b nie koniecznie jest rze-
 telnem, i równanie nie koniecznie ma pierwiastki
 uroione: zależy to bowiem od stosunku między p i
 $3a^2$; to jest: jeżeli $3a^2 > p$, równanie ma dwa pier-
 wiastki uroione; jeżeli zaś $3a^2 < p$; b jest uroionem,
 i równanie ma pierwiastki rzetelne. Kiedy zaś

$3a^2 = -p$, czyli $a = \sqrt{-\frac{p}{3}}$; $b = 0$ i równanie jest w

śamem przeysciu s pierwiastków rzetelnych na uro-
 one lub przeciwnie: włożywszy za a iego wartość

$\sqrt{-\frac{p}{3}}$ w równanie warunkowe (B), otrzymamy:

$\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = 0$, czyli zniósłszy znak pierwiastkowy

$$(D) \quad 4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Zrównanie dające nam związek między ilościami znanymi p, q , w ten czas, kiedy dwa pierwiastki przechodzą z urojonych na rzetelne, lub z rzetelnych na

urojone. W tym momencie $b=0$, $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ jest

mnożnikiem równania.

Ale na cóż nam się zda wiedzieć warunek przeyscia pierwiastków z jednego rodzaju na drugi, jeżeli ten warunek nie nauczy nas o stanie pierwiastków w innych przypadkach. Szukamy czyli funkcją $4p^3 + 27q^2$ w (D) wchodzącą, nie odkryje nam iakięś cechy na pierwiastki równania. Na ten koniec trzeba znowu b wrócić dawną wartość $b = \sqrt{3a^2 + p}$: niech będzie $3a^2 + p = y$, $\therefore 3a^2 + p - y = 0$ (E). gdzie nam trzeba pamiętać, że kiedy równanie ma pierwiastki urojone, y koniecznie być powinno dodatnem; że y jest istotnie odjemnem, kiedy równanie ma wszystkie pierwiastki rzetelne. Jest zaś y dodatnem lub odjemnem podług już wyłożonego stanu i stosunku między a , i p , z którego wynika stosunek ilości znanych p, q , zawarty w równaniu wypadkowym (B). Kombinując równania (A), (B), otrzymaliśmy byli (C) $\therefore 2a(4a^2 + p) - q = 0$ które wyniosłszy do drugiej potęgi, wypada: $4a^2(4a^2 + p)^2 - q^2 = 0$, w to teraz kładąc za a^2 wartość wyciągni-

nię z (E), to jest: $a^2 = \frac{y-p}{3}$, $4a^2 + p = \frac{4y-p}{3}$, otrzy-

mamy: $\frac{4y(4y-p)^2}{3^2} - q^2 = 0$, czyli wykoná-

wszy mnożenie: $4y(4y-3p)^2 - 4p^3 - 27q^2 = 0$ (F). S tego ostatniego mamy: $4p^3 + 27q^2 = 4y(4y-3p)^2$, gdzie widzemy, że iakiémkolwiek jest y dodatnem lub odjemnem; $(4y-3p)^2$ zawsze jest s.fwéy natury dodatnem, a zatem znak $4p^3 + 27q^2$ zawisł jedynie od mnożnika

mnożnika $4y$; jeżeli y jest dodatnem, $4p^3+27q^2$ będzie także koniecznie dodatnem; lecz kiedy y jest dodatnem, b jest rzetelnem i zrównanie podane 3go stopnia ma dwa pierwiastki uroione podług (E). Powtóre y będąc odjemnem, w zrównaniu (F) -- $(4y-3p)^2$ będzie dodatnem, lecz $4p^3+27q^2$ staie się odjemnem. Aże kiedy y jest odjemnem, b staie się uroionem i zrównanie 3go stopnia ma wszystkie pierwiastki rzetelne; więc zrównanie 3go stopnia ma koniecznie wszystkie pierwiastki rzetelne, kiedy $4p^3+27q^2$ jest odjemnem. Owóż prawdziwe znamie pierwiastków rzetelnych lub uroionych w zrównaniu iakiemkolwiek 3go stopnia! $4p^3+27q^2$ będąc odjemne, pokazuje pierwiastki rzetelne; będąc zaś dodatne wytyka pierwiastki uroione; będąc zero, oznaczają moment przeyscia pierwiastków rzetelnych na uroione, lub uroionych na rzetelne. Winniśmy tę tak piękną prawdę s całą teorią zacząćmu dziś Geometrze Imci P. du Sejour Konfiliarzowi Parlamentu Paryzkiego, który ją podałszy w pamiętnikach Akademii na Rok 1772, barzo dowcipnie do linii krzywych przytósował. Spósób atoli którego w tém dociekaniu użył, już był dawniey od I.P. Eulera wytknięty, iako będzieniem mieli sposobność przekonać się o tém niżej.

Nie opuszczajmy dalszych uwag, które nam podać może zrównanie (F). Położywszy w niem $4p^3+27q^2=0$, dwa mnożniki drugiego członka (F) daia $y=0$, albo $4y-3p=0$. Ponieważ zaś $4p^3+27q^2=0$ oznaczają czas przeyscia pierwiastków z jednego rodzaju do drugiego, kiedy bydz powinno $b=0$, temu przeysciu zupełnie odpowiada pierwszy mnożnik $y=0$; ale $4p^3+27q^2$ może bydz także zero,

kiedy $4y-3p=0$, czyli $y=\frac{3p}{4}$, pod ten czas b nie

będzie zero, ale $=\pm\sqrt{\frac{3p}{4}}$, $a=\sqrt{\frac{-p}{12}}$, iako nas

uczą zrównania (E), (A): co nam pokazuje, iż w pewnych

Ulatwia się trudność zacho-
dzącą w zrównaniach wy-
pádkowych,

wnych przypadkach $4p^3+27q^2$ może się stać zero; chociaż pierwiastki nie będą w momencie przejścia z rzetelnych na urojone lub przeciwnie. Do czegoż więc stosować ten przypadek w równaniu, i iak zgodzić s sobą te tak dziwaczne wypadki? Imć P. du *Sejour* barzo nám to dowcipnie tłumaczy:

Niech m, m', m'' , znaczą trzy pierwiastki równania 3go stopnia, s których każdy wyraża się przez $x-a-b\sqrt{-1}=0$, równanie wypadkowe (A) nie oznaczá nám s tych pierwiastków tylko dwa, które położywszy $b=0$, stają się obydwá równe, i pokazują moment przejścia z iednego rodzaju do drugiego; więc pierwszą prawdą która nám się tu pokazuje jest: iż pierwiastki w ten czas tylko są w czasie przejścia z rzetelnych na urojone lub przeciwnie, kiedy dwa pierwiastki dane przez równanie 2go stopnia (A) są równe, czyli, kiedy dwa pierwiastki równe należą do iednego równania i są że tak rzekę téy saméy pary.

Ale $4p^3+27q^2$ jest zawfze zero, ile razy dwa pierwiastki w równaniu 3go stopnia są równe: mogą zaś bydź równe albo té, które należą do téy saméy pary i są dane przez równanie (A); albo té s których ieden tylko należy do równania 2go stopnia, a drugi nie: co żebyśmy łatwiey poięli, wystawmy sobie, że dwa pierwiastki m, m' są téy saméy pary dane obydwá przez równanie 2go stopnia, które stawszy się równe, czynią $4p^3+27q^2=0$, i oznaczają przejście pierwiastków w równaniu podaném z iednego rodzaju do drugiego. Ale będąc raz $m=m'$, po tém przejściu té dwa pierwiastki stają się rzetelne i nierówne; w téy nierówności może się przytrafić, że n. p. $m=m''$, albo że $m'=m''$, to jest, że ieden s téy pary pierwiastków stanie się równy trzeciemu, pod ten czas $4p^3+27q^2$, będzie zero, ale pierwiastki równania podanego nie będą dla tego w momencie przejścia, że dwa z nich nie téy saméy pary, i nie wyciągnięte s tego samého równania,

stały

stały się równe. Należy więc podług tego tłómaczenia warunek $4p^3 + 27q^2 = 0$ odnosić do dwóch przypadków, to jest, kiedy dwa pierwiastki téż samey pary i wypadły z iednego zrównania 2go stopnia stały się równe, i na ten czas w zrównaniu 3go stopnia pokazują moment przechodu pierwiastków z iednego rodzaju do drugiego.

Powtórę: kiedy dwa takie pierwiastki stały się równe, które nie wypadły z zrównania 2go stopnia, i nie są téż samey pary; i na ten czas $4p^3 + 27q^2 = 0$ nie pokazuje przechodu pierwiastków z iednego rodzaju do drugiego.

Stawmy sobie na koniec zrównanie podane $x^3 + px + q = 0$, którego pierwiastki są pewnemi funkcjami p, q ; przy niem wszystkie inne zrównania (A), (B), (C), (E), (F): a położywszy w tém ostatniem $4p^3 + 27q^2 = z$, odmieniemy je na $4y(4y - 3p)^2 - z = 0$, to zrównanie wyraża nam wszystkie stósunki i związki, które zachodzić mogą między wartościami ilości znanych p, q ; i między odpowiadającemi im wypadkami na pierwiastki rzetelne lub urojone zrównania podanego; wiemy bowiem że pierwiastki rzetelne lub urojone w zrównaniu podanem zawiśły od pewnych wartości i stósunków p, q , które wszystkie razem wyraża zrównanie $4y(4y - 3p)^2 - z = 0$. To albowiem zrównanie wyraża związek między z, y ; zrównanie (E) daie związek między y, a ; zrównanie (C) między a, p, q ; więc kombinując je s sobą, wypadnie z (F) ogólny stósunek między p, q, z . A że z jest znamieniem pierwiastków rzetelnych lub urojonych podług znaku dodatniego lub odiemnego; więc (F) zamyka wszystkie stósunki i związki między

dzy ilościami znanemi w równaniu podanem, i między odpowiadającym im rodzajem pierwiastków.

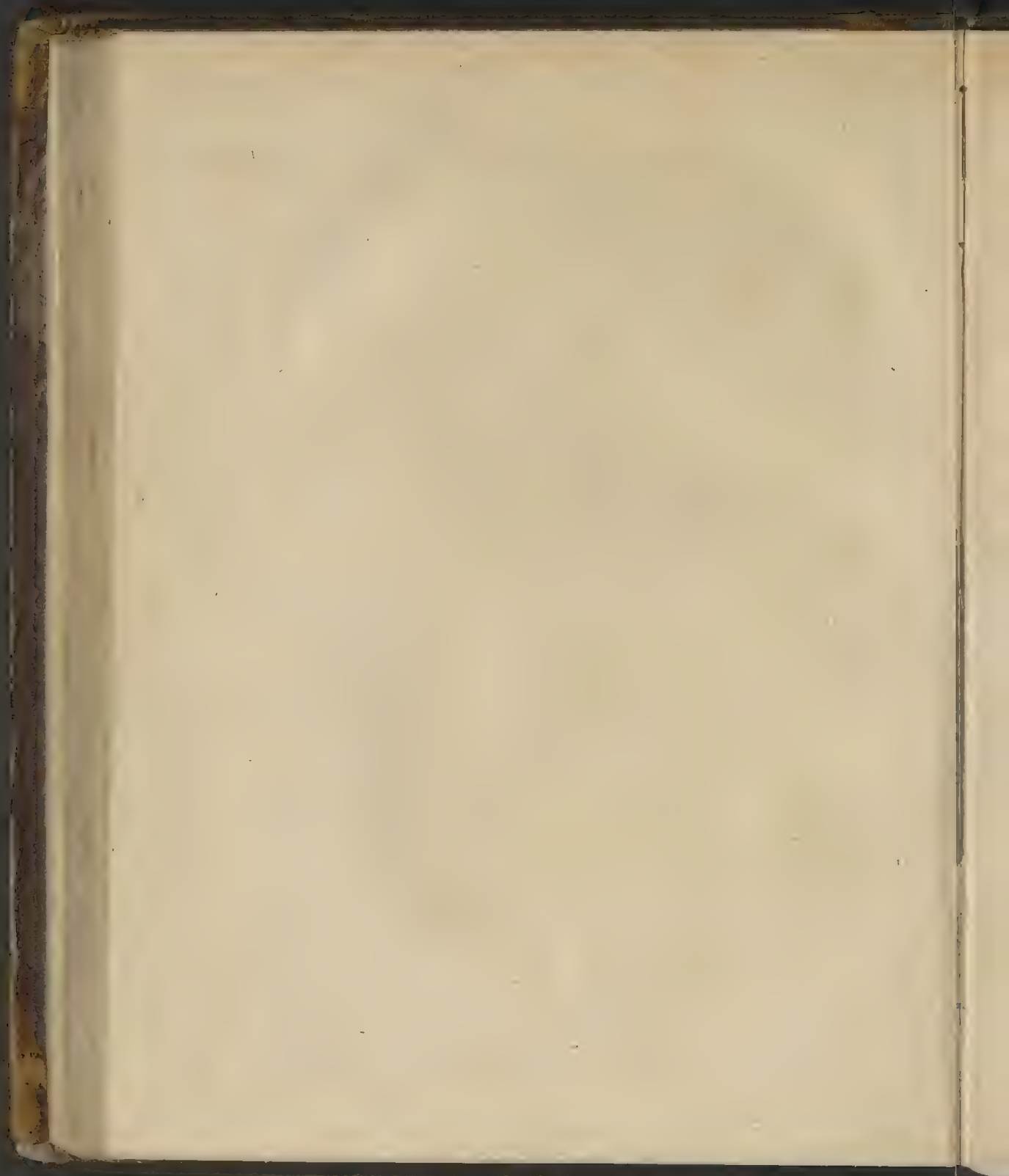
Teorya ta stółowana do zrównań 4go stopnia odkryłaby nam zapewne ważne iakie prawdy i uwagi, ale że ten rachunek barzoby nas rościagnął i odwiódł od tego, naczyméśmy stanęli: każdy z uwąg nad 3cin stopniem poznać powinién ducha téy teoryi, - oraz sposób obeyscia się z nią w iakimkolwiek stopniu wyższym. Zostawiémy to docieczenie prywatnému każdego dochodzeniu, przystępując już do nowego rachunku który nam się w ciągu naszych badań pokazał.

KONIEC PIERWSZEY CZĘSCI.

CZĘŚĆ DRUGA
TŁOMACZĄCA NATURE I WŁASNOŚCI
FUNKCYI PRZESTĘPNYCH,
ORAZ
SPOSOBY ONYCH WYRAZANIA.

L₂

ROZDZIAŁ



ROZDZIAŁ PIERWSZY

165

Rozbierają się Funkcye na SZEREGI: wykładają się własności SZEREGÓW ZWROTNYCH i sposoby wynaydowania OGÓLNEGO ich WYRAZU, s przyśfófowaniem do zrównań.

§. XXXII.

Odbyliśmy sobie w Pierwszey Części to, co do zrównań i odpowiadających im funkcyi należy, idąc tak daleko w tych badaniach, iak daleko w nich rozum ludzki postąpił. Ale ponieważ zawsze z zrównań dochodziliśmy nowych gatunków i własności funkcyi, nie zastanawialiśmy się tam, tylko nad takimi funkcyami, w które wprowadziwszy związek mogliśmy s każdego wartość iakiękolwiek ilości, wyrazić przez inne w zrównaniu zawarte. I tak n. p. mając zrównanie $A+B+C+D=0$, gdzie A, B, C, D , znaczą ilości znane i nieznané zmieszane razem, mogliśmy z związku w tém zrównaniu zamkniętego wyrazić iakąkolwiek ilość przez inne, nie potrzebując do tego, tylko o tych działaniach któreśmy tam dostrzegli w funkcyach, to jest: dodawania, odciągania, mnożenia, dzielenia, wynoszenia do potęg, i wyciągania pierwiastków; do czego przydadź należy rozwiązanie zrównań. Wszystkie początki któreśmy w tych dociekaniach mieli, nie służyły nam tylko za pomoc do wprowadzenia tego lub owego działania w nasze rachunki, tak dalece: że lubo przeszkody te same które zatrzymały wszystkich Geometrów, odiętych nąm sposoby rozwiązywania zrównań stopni wyższych nad czwarty; iednakowóż nie mogły w nas osłabić tego przekonania, że gdyby prawidła nasze na trzeci i czwarty stopień były doskonałsze, przyzlibyśmy do wynalezienia pierwiastków wyższych jeszcze stopni, i że w tém wynaydowaniu nie potrzebaby nam in-

Porównanie
funkcyi Alge-
braicznych z
przebiegniemi.

ných działań prócz tych, które nam w stopniach niższych służyły. Właśność bowiem ogólna zrównań pod §. 20. i same przeszkody na końcu pierwszej części wytknięte, dały nam oczywiście poznać wzajemną zawiłość niższych stopni od wyższych, i przeciwnie; a zatem ostrzegły nas, że działania byłyby tego samego rodzaju, byleby dokładniej mogły być przyrównane. Jeżeli więc nie mogliśmy w zrównaniach 5go, 6go i dalszych stopni wyrazić iakiejkolwiek ilości przez inne; przypisać to powinniśmy niedokładnym prawidłom; nie mamy zaś prawa wnosić potrzeby nowych działań prócz tych, któreśmy wymienili. A zatem zrównania iakiejkolwiek stopni wyższych, iako i funkcyje wielo-kształtne, które im odpowiadają, należą do tego samego rodzaju ilości, któreśmy dotąd uważali. Takowe zrównania nazywają się *Algebraiczne*, dla tego że wynalazek w nich dokładny i niewątpliwy iakiejkolwiek ilości, zawisł od działań Algebraicznych w pierwszej części wyłożonych. Funkcye także mogące się zamienić i ogarnąć w takowych zrównaniach, wzięły imię *Algebraicznych*. Jeżeli więc trafiemy na taki rodzaj funkcyi, które potrzebować będą ianych całę działań, i na których traktowanie nawetby nam nayogólniejsze zrównań Algebraicznych prawidła nie mogły pomóc; umieszczemy je w inną klasę zrównań i funkcyi, które nazwiemy *PRZESTĘPNEMI* (*Transcendentes*).

Działania przywiązane do pewnych kondycyi, iakiem było dzielenie, wyciąganie pierwiastków, przywiodły nas do wyrazu pewnych funkcyi przez pismo terminów nigdy się nie mających skończyć. Przypadek także nieprzywiedlny 3go stopnia wciągnął nas w podobny rodzaj rachunku. Gdyby wynalazek iakieję rzeczy nieznanej z natury swojej zawisł od takiego nieskończonego wyrazu, przyzna każdy, że na odkrycie takięj rzeczy dokładne, wszystkie prawidła naydoskonalsze Algebraicznych zrównań nie mogłyby nam wystarczyć ani pomóc. Zrównanie bowiem
tego

tego rodzaju mając nieskończoną liczbę pierwiastków, nie mogłoby być rozwiązane sposobem przywiązanym do jakiegokolwiek, ale zawsze skończonej pierwiastków liczby, jaką równania Algebraiczne wyrażać zwykły: a gdybyśmy nawet potrafili wartość iednej ilości przez szereg nieskończony wyrazić n. p. $z = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{i t. d.}$ oprócz tego, żeby ten wyraż nie mógł nam nigdy odkryć wartości zupełnej z , ma jeszcze i tę niedoskonałość, że chcąc x wyrazić przez z i inne ilości w równanie wchodzące, nie moglibyśmy nigdy przyiść do tego przez sposoby równaniom Algebraicznym właściwe, a zatem nie potrafilibyśmy z związku podanego wyciągnąć zupełnie wartości iednej jakiegokolwiek ilości przez inne. Ale możemy z tego wniesć, że funkcy nierozdzielne zupełnie, funkcy pierwiastkowe, i równania 3go stopnia nie są funkcjami Algebraicznemi? Bynajmniej: funkcy bowiem nierozdzielne mają swóy wyraż ułomkowy skończony, który zamieniony lub wciągniony w równanie kładzie nas w stanie wynalezienia jakiegokolwiek ilości zupełnie, za pomocą działań Algebraicznych; i nie zamienia się na szereg nieskończony, tylko kiedy ją chcemy wyrazić przez różne potęgi ilości nieznaney wchodzący w mianownik. Takowy wyraż ciągnąc się bez końca dać nam poznać, że funkcy nie mającą potrzebny kondycyi do zupełnej podzielności, może przeiść przez wszystkie potęgi ilości nieznaney, i przez wszystkie terminy postępu Geometrycznego, zostając zawsze niepodzielną: i że wszystkie Algebraiczne działania wyczerpawszy, nie potrafimy iey natury odmienić. Funkcy także pierwiastkowe niewymiérne rozbiierając się na szeregi nieskończone, nie przeistają byż Algebraicznemi; bo mają swóy wyraż pierwiastkowy skończony, przy którym zamieniwszy ie na równanie, możemy w nich ilość iakąkolwiek wyrazić przez inne sposobem zupełnym, oswobodzwszy ie wprzód od znaku pierwiastkowego podług

§. 25. Ich wyraz nieskończony pokazuje tylko to, co w funkcyach niepodzielnych, to jest: że będąc z natury swej niezupełnemi potęgami, nie potrafimy ich przez wszystkie gatunki działań algebraicznych na potęgi zupełne przerobić. Zrównania nakoniec 3go stopnia przyprowadziły nas do szeregu nieskończonego przez niedoskonałość prawideł do tego użytych. Nie można bowiem tego dowieść, że zrównanie 3go stopnia przez naturę swoją nie może wydać pierwiastków w wyrazie skończonym, kiedy te są wszystkie rzetelne; widzieliśmy bowiem przypadki szczególne, które wystawiając nam pierwiastki pod wyrazem uroionym i niewymiernym, dały się przecie przywieść do wyrazu rzetelnego i skończonego.

Wyciąga się z zadania zachodzić mogące w teorii szeregów, które nas zatrudniać mają.

Kiedy zaś po użyciu wszystkich nam dotąd zastosowanych sposobów nie możemy przyść do pierwiastków skończonych zrównania, przestać na ten czas musimy na pierwiastkach bliskich prawdy wyciągniętych z pierwszych terminów szeregu, które starać się winniśmy iale naybarziej uczynić malejącemi, aby to, co opuszczamy, małością swoją nie rodziło znaczney odmiany w wypadkach rachunku. Chcąc zaś sądzić o wartości opuszczonych terminów, potrzeba wiedzieć zachodzące w ich ciągu prawo przywiązane do gatunku i wzoru funkcyi; przy którym mając wiadomą wartość ilości w terminy wchodzących, poznamy łatwo stopnie ich wzrostu lub ubywania. Te jeszcze dostrzeżone prawa następstwa służą nam do wynalezienia funkcyi skończoney, która się na taki szereg rozbiérá, kiedy ta jest nieznaná. Nim nam się te myśli w większym pokazać świetle powinny nam teraz dać uczuć, że pusiwszy mimo siebie innego rodzaju funkcyę, których jeszcze nie znamy, samé funkcyę Algebraiczne wyciągaia po nás dokładnego poznania szeregów nieskończonych. W tém poznaniu zachodzą trzy zadania do których rozwiązania cała nasza zmierzac będzie

będzie uwaga; to jest: mając funkcją jakąkolwiek Algebraiczną mogącą się rozebrać na szereg nieskończony, wynaleśdź sposób łatwy i ogólny na ten zbiór: *powtóre*: mając funkcją rozbraną na szereg nieskończony, wynaleśdź prawo, podług którego układają się terminy bez końca się ciągnące: *potrzebie*. Mając szereg nieskończony i prawo jego postępu, odkryć funkcję, którą ten szereg s siebie wydała. Zatrudniemy się rozwiązaniem tych zadań, które składać będą całą teorią szeregów nieskończonych, abyśmy się nauczyli w wszelkich przypadkach obchodzić nie tylko s funkcjami Algebraicznymi, ale nawet i s funkcjami innego rodzaju jeżeli nam się pokażą, i jeżeli ich wyraz zawisnie od szeregów.

Ponieważ zaś w teraźniejszyach badaniach wynieśliśmy się już do rozległyszey ogólności, uważając funkcye niezawisłe od żadnego pytania szczególnego, muszemy upowszechnić nazwisko i podział ilości w funkcye wchodzących, abyśmy się zbliżali co raz bardziej do języka wyższych matematycznych nauk. W pierwszey Części dzieliliśmy ilości na znane i nieznané, dla tego, że w teorii równań szło nam zawżę o wynalezienie pierwiastków, czyli wyrażenie ilości niewiadomey przez wiadome; do równań stosując funkcye, zachowaliśmy w nich to samo nazwisko. Ze zaś uważać nam przyidzie funkcye przez się, nie mając względu na wartość ilości nieznaney, dzielić ielzcie będziemy ilości na ODMIENNE (*variables*) i STATECZNE (*constantes*). Przez pierwsze rozumieć będziemy ilości odmieniające swoię wartość jakimkolwiek sposobem, to jest sposobne do przyjęcia wszystkich jakie się tylko wymyślić mogą wartości; przez drugie będziemy rozumieć ilości dochowujące w całym ciągu rachunku raz nadanęj wartości. Iłości odmienné znaczyć będziemy przez ostatnie litery alfabetu *x, y, z, i t. d.* tak iakieśmy znaczyli ilości niewiadome; ilości zaś stateczne tak, iak ilości wiadome przez litery alfabetu pierwsze *a, b, c,*

Ls

i t.d.

i t. d. Zaczniemy od pierwszego zadania które ro-
sciągniemy do funkcyi ułomkowych i pierwiastko-
wych.

Sposoby ro-
zbierania fun-
kcyi ułomko-
wych na sze-
regi.

Wystawmy sobie funkcję ułomkową: $\frac{M}{N}$

$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+---kz^n}{p+qz+rz^2+sz^3+---tn+1}$ przywiedzioną już za pomo-
cą dzielenia do prawdziwego ułomku. Biorąc porządkie
różne iey potęgi poczawszy od náyprościęszey $\frac{a}{p+qz}$

aż do náyzawikłęszey, i té rozbierając ciągłém dzie-
leniem, znajdziemy przez prawidła §. 3. że

$$\frac{a}{p+qz} = \frac{a}{p} - \frac{aq}{p^2}z + \frac{aq^2}{p^3}z^2 - \frac{aq^3}{p^4}z^3 + \frac{aq^4}{p^5}z^4 - \text{it.d}$$

które podobnie stófuiać do $\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}$, $\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$,

i t. d. przyidziemy do wyrazu nieskończoného ka-
żdę w szczególności funkcyi. W tych szeregach
pokaże nam się tén sam stateczny stółunek jednego
terminu do drugiego po nim następującego, iak n.p.

w $\frac{a}{p+qz}$: stółunek tén wypada $\frac{qz}{p}$ między każdými

dwoma przyległými terminami; czyniąc **POSTĘP GEO-**
METRYCZNY (*Progressio Geometrica*) układający się po-
dług potęg ilości nieznaney z ; co właśnie zgadza się
z naturą ułomku. Ale jeżeli té prawidła dzielenia
będziem chcieli rościagnąć do funkcyi zawiłkłych, z
mimo pracowite i rozwlekté działaniá, stracemy bar-
zo wiele na dochodzeniu nowych prawd, które s ta-
kiego rachunku mogą wypadac. Szukáymy więc
rozległéjšzego sposobu rozbierania iakichkolwiek fun-
kcyi ułomkowych na szeregi. Wiedząc i s przykła-
dów szczególnych i z natury ułomków że wżyskie
takowé szeregi postępuia podług porządkie wzrastá-
jących potęg ilości nieznaney z , nie idzie nam tylko
o wyna-

o wynalezienie ogólne współ-czynników każdego terminu: nazwiemy te współ-czynniki A, B, C, D, E , i t. d. a funkcję podaną rozbierze się na szereg następujący. $\frac{a}{p+qz} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+$ i t. d.

w nim tyle rzeczy mamy nieznanych do wynalezienia, ile jest terminów szeregu. Przywiódźmy nam-przód to zrównanie do zero, zniósłszy ułamek, i ułożymy terminy według porządku potęg z ; wypadnie

$$0 = pA + Bp.z + pC.z^2 + pD.z^3 + pE.z^4 + \text{i t. d.}$$

$$-a + qA. + qB. + qC. + qD.$$

Zrównanie to powstałszy z zróżnicowania funkcji, jest zrównaniem *TOSAMEM* (*Identica*); nie może więc według §. 10. wyrażać żadnego związku między ilością znaną i nieznanymi, a zatem powinno mieć miejsce niezawisłe od żadnej szczególnej wartości na z . Nie mogą więc w niem ani wszystkie terminy razem, ani kilka ich na raz być zero, ale tylko każdy z osobna; inaczej wprowadzilibyśmy związek między z , i ilościami znanymi, skąd wypadłyby pewne wartości na z , i ułamek szereg rodzący przeobraziłby się w funkcję. Jeżeli zaś każdy z osobna termin był powinién zero, nie może być $z=0$, bo przez to nadałaby się wartość z . Przeto w każdym terminie współ-czynnik ilości nieznaney z , być powinien zero, skąd powstanie tyle zrównań ile terminów:

$pA - a = 0$ Te wszystkie zrównania służą na oznaczenie współ-czynników nieznanych A, B, C, D , i t. d. wyciągnię-
(a) $pC + qB = 0$ my bowiem z nich

$$\text{i t. d. } A = \frac{a}{p}, B = -\frac{qA}{p} = -\frac{qa}{p^2}, C = \frac{qB}{p}$$

$\frac{aq^2}{p^3}$ i t. d. które włożywszy w szereg na miejsce A, B, C , i t. d. wypadnie:

Ł6

$$\frac{a}{p+qz}$$

$$\frac{a}{p+qz} = \frac{a}{p} - \frac{aq}{p^2}z + \frac{aq^2}{p^3}z^2 - \frac{aq^3}{p^4}z^3 + \text{i t. d.}$$

Mając sobie podane funkcyje do rozbić, zawikłaysze n.p. $\frac{a+bz}{p+qz+rz^2}$, $\frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$. . .

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{p+qz+rz^2+sz^3+tz^4} \text{ i t. d. i obchodząc się z niemi}$$

podług dopiero wyłożonego początku, będzie:

$$\frac{a+bz}{p+qz+rz^2} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{i t. d. czyli}$$

$$0 = Ap+Bp.z+Cp.z^2+Dp.z^3+Ep.z^4+\text{i t. d.}$$

$$-a + Aq. + Bq. + Cq. + Dq. + \text{i t. d.}$$

$$-b. + Ar. + Br. + Cr. + \text{i t. d.}$$

czyniąc każdego współ-czynnika równym zero, otrzymamy náprzód: $Ap-a=0$, $Bp+Aq-b=0$, powtóre:

$$Cp+Bq+Ar=0. \quad (\beta). \quad \text{Podobie funkcyá } \frac{a+bz+cz^2}{p+qz+rz^2+sz^3}$$

$$Dp+Cq+Br=0.$$

rozebraną na podobny szereg, przywiedzie nás do zrównania:

$$0 = Ap+Bp.z+Cp.z^2+Dp.z^3+Ep.z^4+Fp.z^5+\text{i t. d.}$$

$$-a + Aq. + Bq. + Cq. + Dq. + Eq.$$

$$-b. + Ar. + Br. + Cr. + Dr.$$

$$-c. + As. + Bs. + Cs.$$

skąd náprzód na początkowe terminy przypadnie:

$$Ap-a=0, \quad Bp+Aq-b=0, \quad Cp+Bq+Ar-c=0, \quad \text{potém}$$

$$Dp+Cq+Br+As=0$$

$$Ep+Dq+Cr+Bs=0 \quad (7)$$

$$Fp+Eq+Dr+Cs=0$$

$$\text{i t. d. Funkcyá reszcie}$$

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{p+qz+rz^2+sz^3+tz^4} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{i t. d. czyli}$$

$$0 = Ap$$

$$0 = Ap + Bp.z + Cp.z^2 + Dp.z^3 + Ep.z^4 + Fp.z^5 + i \text{ t. d.}$$

$$-a + Aq. + Bq. + Cq. + Dq. + Eq.$$

$$-b. + Ar. + Br. + Cr. + Dr.$$

$$-c. + As. + Bs. + Cs.$$

$$-d. + At. + Bt.$$

s których otrzymamy naprzód $Ap - a = 0$, $Bp + Aq - b = 0$, $Cp + Bq + Ar - c = 0$, $Dp + Cq + Br + As - d = 0$: powtóre dalsze terminy dadzą

$$Ep + Dq + Cr + Bs + At = 0$$

$$Fp + Eq + Dr + Cs + Bs = 0 \quad (d.)$$

$$Gp + Fq + Er + Ds + Ct = 0$$

i t. d.

Zastanowiwszy teraz uwagę naszą nad temi funkcjami ułomkowemi i nad wypadkami im odpowiadającemi, znajdziemy:

Naprzód. Ze pierwsze terminy każdego szeregu co do wartości swojej zawisły od licznika ułomku, tak dalece: że liczba terminów w liczniku przez swoje współ-czynniki wpływa w wartość równy sobie liczby współ-czynników szeregu. Jeżeli n. p. licznik ułomku zawierać będzie trzy terminy; w szeregu tej funkcji trzech terminów początkowych współ-czynników, zawisną od trzech współ-czynników licznika.

Właściwości
szeregów zwro-
tnych.

Powtóre. Przeszedłszy liczbę terminów szeregowych równą liczbie terminów licznika, wszystkie współ-czynniki dalszych terminów zawisły od współ-czynników terminów poprzedzających, i od współ-czynników mianownika ułomku, tak dalece: że jeżeli mianownik ułomku zawiera dwa terminy; współczynnik terminu szeregowego zawisł od jednego współ-czynnika poprzedzającego, iako nas o tem przekonywają równania (x). Jeżeli mianownik zawiera trzy terminy, współczynnik każdy terminu szeregowego zawisł od dwóch poprzedzających, iako pokazują równania (y). Nakoniec jeżeli mianownik ułomku zawiera liczbę n terminów; współczynnik terminu

terminu szeregowego zawiść od liczby $n-1$ poprzedzających. Ponieważ więc w szeregu s funkcji ułomkowej powstającym, każdy współ-czynnik jest funkcją kilku poprzedzających, szeregi takowe nazywają się ZWROTNEMI (*Series Recurrentes*). dla tego, że chcąc oznaczyć którego z nich, wracać się muszęmy do poprzedzających go.

Potrzebie: Terminy poprzedzające przez które wyraża się iakikolwiek współ-czynnik szeregowy, są mnożone przez współczynniki mianownika ułomku; od współczynników więc mianownika zawiść cały stosunek i związek terminów szeregowych co do ich wartości i liczby: i dla tego te współ-czynniki nazywać odtąd będziemy z Angielskim Geometrą *Mouire*, STOPNIAMI STÓSKUNKU (*Scala relationis*). Jeżeli mianownik ułomku jest $p+qz$, w szeregu stąd powstającym współ-czynnik Q terminu iakiegokolwiek oznacza się przez zrównanie: $pQ+qP=0$; jeżeli $p+qz+rz^2$ jest mianownikiem ułomku, w jego szeregu współ-czynnik Q zawiść od zrównania $pQ+qP+rO=0$. i t. d. gdzie litery p, q, r , i t. d. są tém, co my nazywamy stopniami stosunku.

Poczwarté: Oznaczając z zrównań $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$, i t. d. współ-czynniki iakiegokolwiek s terminów szeregowych, przez poprzedzające, przypadają wszytkie dzielić przez p , czyli przez termin całki wiadomy mianownika ułomku; więc w przypadku kiedy ta ilość byłaby zero, wszytkie terminy stana się nieskończone, i pokazują nieprzyzwoitość żaśztą w rachunku. Zatrzymámy się teraz nád sposobém rozbierania takowych funkcji.

§. XXXIII.

Mámy iuż ieden początek którego statecznie używamy w ułatwieniu trudności wypadających s pewnych szczególnych przypadków wybáczających od teorii ogólnych. Tén początek zależy na tém, ażeby rostrząsnąć náprzód dla czego przypadek nasz nie

Rozwiązua
się szczególne
przypadki w
ułomkach ro-
dzących szere-
gi.

nie zgadzają się z ogólnemi prawidłami: powtóre, przywiesdz go do takiego wyrazu, na jaki służyły te ogólne prawidła. Tu n.p. wypadła nam nieprzyzwoitość zniszczywszy termin całki wiadomy, który wchodził w mianownika, cała więc przyczyna téj nieprzyzwoitości wynika z różnicy między wzorem

pierwzych przykładów $\frac{a+bz+cz^2+i \text{ t. d.}}{p+qz+rz^2+sz^3+i \text{ t. d.}}$ i

przykładów terażniejszych, które się wyrażają przez $\frac{a+bz+cz^2+i \text{ t. d.}}$

, ale przywiódłszy ten ostatni $\frac{qz+rz^2+sz^3+i \text{ t. d.}}$

do pierwszego, wpadniemy znowu na takie przypadki którym służyły prawidła już użyte. I tak rozebrawszy mianownika ostatniego wzoru na dwa mnożniki $z(q+rz+sz^2+i \text{ t. d.})$, złożmy pierwszy ułomek $\frac{a+bz+cz^2+i \text{ t. d.}}$

łomek $\frac{qz+rz^2+sz^3+i \text{ t. d.}}$, który rozbierze się na

szereg nieskończony, przez te same prawidła, które nam służyły wyżej: ten szereg potem rozdzieliwszy przez z , wypadnie wartość ułamku podanego, to jest:

$$\frac{a+bz+i \text{ t. d.}}{z(q+rz+sz^2+i \text{ t. d.})} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + Fz^4 +$$

$i \text{ t. d.}$ Chcąc jeszcze wystawić przypadek terażniejszy pod ogólniejszym wzorem, uważamy funkcją $\frac{a+bz+cz^2+i \text{ t. d.}}$

$$\frac{a+bz+cz^2+i \text{ t. d.}}{qz^m+rz^{m+1}+sz^{m+2}+i \text{ t. d.}} = \frac{A}{z^m(q+rz+sz^2+i \text{ t. d.})}$$

a szereg z tego ostatniego wyrazu podług dopiero

$$\text{wyłożonego działania wypadnie: } \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} +$$

$$\frac{C}{z^{m-2}} + \frac{D}{z^{m-3}} + i \text{ t. d.} = \frac{a+bz+i \text{ t. d.}}{z^m(q+rz+sz^2+i \text{ t. d.})} \text{ przy-}$$

wiódłszy takowe zrównanie do zero, każdy współczynnik będzie zero, i na z nie przypadnie żadna wartość, podług prawd gruntowych, na których zakładaliśmy rozbiór funkcji ułamkowych na szeregi.

Zebysmy

Zebyśmy nic nie opuścili cokolwiek do zupełności téj teoryi należy, potrzeba nam przejść przez wszystkie wyrazy funkcyi ułomkowych; tych różnica wiemy że wypada z różności mianownika; który iako wyraża naturę ułomku, tak razem ciągnie za sobą prawo stółunku między jakimkolwiek terminem i poprzedzającemi go. Wystawmy sobie więc funkcyę ułomkową pod wszelką iaka się tylko wymyślić może postacią; tych szukać nam potrzeba w różnych wyrazach mianownika. Wiemy s pierwszý Części że funkcyi natura wypada z natury mnożników, tak iako natura zrównania powstaie z natury pierwiastków. Té mnożniki mogą byđ równé lub nierówné, rzetelne lub uroione. Nie przypada nam tu jeszcze użycie tego ostatniego podziału, dla tego, że funkcyę uważamy w całym swoim składzie, wyrażając ie przez szereg. Ale pierwszy podział należy istotnie do teraźniejszego zamiaru. Biorąc za mianownika funkcyę $p+qz+rz^2+$ i t. d. uważaliśmy go pod ogólnym barzo wyrazem, a zatem iako złożonego z mnożników nierównych iakiekhkolwiek: uszczególnimy teraz naszé myśli, i wystawmy sobie mianownika z mnożnikami równemi, a tym sposobem wypadną nam różne potęgi w ułomku; to jest:

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2}, \frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3}, \text{ i ogólnie } \frac{a+bz+cz^2+dz^3+\text{ i t. d. }}{(1-pz-qz^2+\text{ i t. d.})^m},$$

$$\frac{a+bz+\text{ i t. d. }}{(1-pz)^m}$$

Pierwszy ułomek rozebrawszy na szereg, otrzymamy:

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d. }, \text{ czyli}$$

$$0=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{ i t. d. }$$

$$-a-2pA. -2pB. -2pC. -2pD. -2pE. +\text{ i t. d. }$$

$$+b. +p^2A. +p^2B. +p^2C. +p^2D. +\text{ i t. d. }$$

więc

więc $A-a=0$, $B-2pA-b=0$,
 $E-2pB+p^2A=0$, skąd wypada $A=a$, $B=2pa+b$,
 $D-2pC+p^2B=0$, $C=3p^2a+2pb$, $D=4p^3a+3p^2b$,
 $F-2pD+p^2C=0$, $F=5p^4a+4p^3b$.
 i t. d. a przeto funkcya, podana,

$$\frac{a+bz}{(1-pz)^2} = a + 2pa.z + 3p^2a.z^2 + 4p^3a.z^3 + 5p^4a.z^4 + \text{i t. d.} \quad (6)$$

$$+ b + 2pb.z + 3p^2b.z^2 + 4p^3b.z^3 + \text{i t. d.}$$

W tym szeregu łatwo jest barzo widzieć układ ciągłych terminów, i ten wyrazić przez wykładnik n i ilość nieznany z : wyraz takowy oznaczający współ-czynnik iakiegokolwiek terminu przez wykładnik z w tym terminie zachodzącego, nazwiemy WYRAZEM OGÓLNYM SZEREGU (*Terminus generalis seriei*); ten bowiem wyraz przez stosunek który nam pokazuje między wykładnikiem i współ-czynnikiem każdego terminu, małe nam prawo, za którym idzie szereg, i oznaczá wartość iakiegokolwiek terminu nie zawisłą od wszystkich innych. Wyraz ogólny szeregu dopiero uważanego jest $[(n+1)p^n a + np^{n-1}b]z^n$ skąd, za wartością wykładnika n , wypadnie cały mu odpowiadający termin szeregu. Idąc dalej w tém dociekaniu, znajdziemy szeregi na funkcye wyższych stopni.

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3} = A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{i t. d. czyli}$$

$$0=A+B.z+C.z^2+D.z^3+E.z^4+F.z^5+\text{i t. d.}$$

$$-a-3pA, -3pB, -3pC, -3pD, +3pE, -\text{i t. d.}$$

$$-b+3p^2A, +3p^2B, +3p^2C, +3p^2D, +\text{i t. d.}$$

$$-c, -p^3A, -p^3B, -p^3C, -\text{i t. d.}$$

Skąd wypadają równania: $A-a=0$, $B-3pA-b=0$,

$$C-3pB+3p^2A-c=0,$$

$$D-3pC+3p^2B-p^3A=0, \quad A=a, B=3pa+b, C=6p^2a+3pb+c,$$

$$E-3pD+3p^2C-p^3B=0, \quad D=10p^3a+6p^2b+3pc,$$

$$F-3pE+3p^2D-p^3C=0, \quad E=15p^4a+10p^3b+6p^2c,$$

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-pz)^3} = a + 3pa.z + 6p^2a.z^2 + 10p^3a.z^3 + 15p^4a.z^4 + \text{i t. d.}$$

$$+ b + 3pb.z + 6p^2b.z^2 + 10p^3b.z^3 + \text{i t. d.} \quad (7)$$

$$+ c + 3pc.z + 6p^2c.z^2 + \text{i t. d.}$$

M

chcąc

chcąc dalej ciągnąć ten szereg przypatrzmy się z uwagą współ-czynnikom każdego terminu, a dostrzeżemy łatwo, że ich prawo zamknięte jest w tym wyrazie ogólnym

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} p^n a + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} p^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1 \cdot 2} p^{n-2} c \right] z^n.$$

Rozbierając jeszcze tym samym sposobem funkcję $a+bz+cz^2+dz^3$,

znajdziemy naprzód, że każdy termin szeregu z tą powstającego wyrazi się przez cztery poprzedzające mnożone przez współ-czynniki czwartej potęgi, gdzie oraz dostrzeżemy że jego termin ogólny jest:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3} d \right] z^n.$$

Stawiawszy sobie teraz przed oczy wynalezioną dotąd wyrazy ogólne na różne potęgi mianownika, łatwo nam z tą będzie przez porównanie i podobieństwo przyszedł do wyrazu ogólnego takiego ułamku, którego mianownik jest potęgą n ; takowy bowiem wyraz wypada oczywiście:

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots [n+(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m-1)} p^n a + \frac{n(n+1)(n+2) \dots [n+(m-2)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m-1)} p^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1) \dots [n+(m-3)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m-1)} p^{n-2} c + \dots + \frac{[n-(m-1)][n-(m-2)] \dots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (m-1)} p^{n-(m-1)} g \right] z^n.$$

gdzie n znaczy jakiegokolwiek wykładnika ilości odmiennę z ; m wykładnika potęgi w mianowniku, g ostatniego współ-czynnika w liczniku. Na-

Należałoby nam tu rościagnąć uwagę na funkcyę ułomkową zamykającą w mianowniku potęgę iakiękolwiek WIELO-WYRAZÓW (*Polynomium*). Ale że ten rachunek byłby nadto dla nas zawikłany odbywając go sposobem który nam tu posłużył, zostawimy go więc wyższym częściom Matematyki. Niżej zaś przyjdzie nam się zastanowić nad wypadkami teraznięjszych dostrzeżeń, wróćmy się jeszcze do rostrzafania szeregów powstających z rozbioru funkcyi ułomkowych mających różne potęgi w mianowniku. Przypatrzwszy się terminom szeregu (e) i uczyniwszy w nich $p=1$, $z=1$, zamieni się ten szereg na

$a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+(5a+4b)+\dots$ i t. d. gdzie między dwoma każdymi przyległemi terminami, zachodzi ta sama stałeczna różnica, a zatem ten szereg czyni to, co nazywają POSTĘPEM ARYTMETYCZNYM (*Progressio Arithmetica*). Każdy termin w tym szeregu nie przestaje być funkcją dwóch poprzedzających: wystawiwszy sobie bowiem ten szereg pod wyrazem: $A+B+C+D+E+\dots$ i t. d. będzie $C=2B-A$, $D=2C-B$, $E=2D-C$, i t. d. a przeto każdy postęp Arytmetyczny jest szeregiem zwrotnym. Idąc do dalszych potęg, uczynmy w równaniu (λ) $p=1$, $z=1$, a zamieni się na:

$$a+(3a+b)+(6a+3b+c)+(10a+6b+3c)+(15a+10b+6c)+\dots \text{ i t. d.}$$

biorąc różnicę między każdymi dwoma przyległemi terminami, powstanie z tych różnic drugi szereg:

$$(2a+b)+(3a+2b+c)+(4a+3b+2c)+(5a+4b+3c)+\dots \text{ i t. d.}$$

w którym dopiero każde dwa przyległe terminy od siebie odciągnione, dają wszędzie jedną stałeczną resztę $a+b+c$: co pokazuje postęp Algebraiczny drugiego porządku, dla tego, że w nim dopiero drugie różnice są stałeczne: takim jest postępem szereg liczb 1, 8, 27, 64, 125, i t. d. którego każdy termin jest funkcją trzech poprzedzających, mających za stopnie stółunku współczynników trzeciej potęgi, tak dalece, że wyraziwszy taki szereg przez $A+B+C+D+\dots$ i t. d.

Mz

będzie

będzie $D=3C-3B+A$, $E=3D-3C+B$, i t. d.

Ciągając tym samym sposobem nasz rachunek, fun-

kcyj: $a+bx+cx^2+dx^3$ przyprowadzi nas do szeregu,

W którym położywszy $p=1$, $z=1$, trafiemy na po-
stępek Algebraiczny trzeciego Porządku, w którym trze-
cie dopiero różnice będą stateczne: takim jest szereg
liczb 1, 8, 27, 64, 125, 216, i t. d. gdzie każdy ter-
min jest funkcją czterech poprzedzających, które
mają za stopnie związku współczynniki potęgi
czwartej, tak dalece że wyraziwszy taki szereg przez
 $A+B+C+D+E+$ i t. d. znajdziemy $E=4D-6C+4B-A$, $F=4E-6D+4C-B$, i t. d. Ułomek nakoniec
którego mianownik będzie potęgą m , przyprowadzi
nas do postępu Algebraicznego $m-1$ go porządku, dla
tego, że w nim dopiero różnice $m-1$ te będą stateczne.
Każdy takowego szeregu termin jest funkcją m po-
przedzających, w których współczynniki potęgi m są
stopniami związku: co nam pokazuje tę ogólną pra-
widę, że postępy Arytmetyczne i Algebraiczne iakieg-
okolwiek porządku są szeregami zwrotnymi. W
uwagach jeszcze terażniejszych pokazało nam się, że
s szeregow iakiegokolwiek porządku, przez różnice
między dwoma przyległymi terminami rodzą się no-
we szeregi, s których dopiero przed-ostatni jest postę-
pem Arytmetycznym wyłaiącym różnice stateczne.
Tu odkrywają nam się nowy sposób uważania szere-
gów zwrotnych, przez wzgląd na ich różnice wypa-
dające z odciągania dwóch iakichkolwiek przyległych
terminów. Ale ten sposób nie należy tu jeszcze do
naszego zamiaru.

Wróćmy się teraz do uwag które nam pozostały o
wyrażach ogólnych, a które razem należą do rozwią-
zania drugiego zadania o szeregach. Stawmy sobie
razem przed oczy wyraży ogólne, któreśmy nie da-
wno wynaleźli na funkcye ułamkowe mające w mia-
nowniku różne potęgi, a uczyniwszy w nich $t=0$,

$t=0$,

$c=0$, $d=0$, $g=0$, tak dalece, żeby licznik ułamku nie zamykał tylko samą ilość stałą i wiadomą, którą wyrażemy przez A ; wyciągniemy na

$$\text{Funkcye: } \frac{A}{(1-pz)^2} \quad \frac{A}{(1-pz)^3}$$

$$\text{Wyrazy ogólne: } (n+1)Ap^n z^n \quad \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} Ap^n z^n$$

$$\text{Funkcya: } \frac{A}{(1-pz)^k}$$

$$\text{Wyra. ogół: } \frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (k-1)} Ap^n z^n$$

S tego powodu wróćmy się jeszcze do ułamków których mianowniki składają się z mnożników nierównych, a któreśmy już uważali naśmprzód. Przypomniawszy sobie szereg powstający z ułamku $\frac{a}{p+qz}$ łatwo dostrzeżemy, że jego wyraz ogólny jest:

$$\pm \frac{aq^n}{p^{n+1}}, \text{ gdzie znak niższy należeć będzie do liczby nieparzystej; niższy zaś do liczby nieparzystej: ten jeszcze wyraz ogólny wyrażemy prościej przez } \frac{a(-q)^n}{p(p)^n}, \text{ jeżeli więc funkcją ułamkową } \frac{a}{p+qz} \text{ przy-$$

wieździemy do wzoru $\frac{A}{1-pz}$, będzie $Ap^n z^n$ iey wy-

razem ogólnym. Rozbierając zaś funkcye, których mianownik należy do wzoru $p+qz+rz^2+sz^3$ i t. d. zobaczymy tak zawikłane kombinacye między współczynnikami terminów, iż z nich ani sobie obiecywać można sposobu na znalezienie wyrazu ogólnego; ten bowiem zależy na pewnym stosunku między współczynnikami iakiegokolwiek terminu, a wykładnikiem ilości odmiennę w tymże terminie: współczynniki zaś będąc funkcjami p, q, r, s , i t. d. nie

M;

moga

mogą być przez liczbę n w swych kombinacjach wyrażone. Bo gdyby nawet ilościom p, q, r, s , i t. d. naznaczone były pewne liczebne wartości, potrzebaby były w stanie wyciągnięcia wszystkich zachodzących kombinacji tych liczb z iednej liczby n , co jest niezmiernie trudno i przez naturę liczb, i przez ograniczoną barzo naszą wiadomość w ich teoryi. Zostaje nam w téj trudności chwycić się zostawionego nam dociekaniom sposobu, to jest przywieść iakąkolwiek funkcją mającą mianownika złożonego z

mnożników nierównych, do wyrazu $\frac{A}{x-pz}$ albo do

$\frac{A}{p-qz}$; to jest: potrzebaby mianownika rozebrać na

swę mnożniki proste, i s. tych złożyc tyle ułomków wzoru $\frac{A}{p-qz}$ ile takowych znajduje się mnożników,

tak, żeby summa ułomków prostych była równą ułomkowi podanemu. Wynalazłszy potem wzory ogólne na każdy s tych prostych ułomków, będzie summa tych wzorów ogólnych równą wyrazowi ogólnemu ułomku podanego. Zatrudniemy się teraz tym wynalazkiem.

§. XXXIV.

Funkcyą prawdziwie ułomkową wyraża się naye-

gólniey: $\frac{M}{N} = \frac{a+bz+cz^2+dz^3 \dots +gz^n}{p+qz+rz^2+sz^3 \dots +kz^{u+1}}$; gdzie

potęga najwyższą w liczniku, jest koniecznie mniejszą od potęgi najwyższej mianownika. Zeby roz-

biierać tę funkcję na ułomki proste $\frac{A}{a'-b'z}$ zosta-

wić ją przy całej swęj ogólności; potrzeba koniecznie, aby takowe ułomki proste dodane do siebie były ze wszystkim równe ułomkowi podanemu, i nie wprowadziły żadnego warunku, któryby mógł iego sciesnić ogólność; potrzeba więc aby funkcyje ułomkowe

Wyrażaia się
ułamki składa
ne przez ułom
ki proste.

kowe proste, były i co do wyrazu i co do liczby takie, iżby przywiódłszy je do zero, współczynników ilości odmiennę tyle tylko wypadło zrównań, ile ilości nieznaných. To zaś wszystko zachowamy ro-

zbierając funkcją $\frac{M}{N}$ na tyle ułomków prostych: --

$$\frac{A}{a'-b'z} + \frac{B}{c'-d'z} + \frac{C}{f'-g'z} + \text{i t. d. ile jest mno-}$$

żników prostych nierównych w mianowniku N , gdzie nam potrzeba pamiętać, że ponieważ te ułomki proste być powinny koniecznie ułomkami prawdziwemi, w których potęga ilości odmiennę w liczniku, być powinna niższą od potęgi mianownika; liczniki A, B, C, D , i t. d. muszą być koniecznie ilościami całkiem statecznemi. Mówiłem że na tyle ułomków prostych wspomnianego wyrazu rozbięra się funkcją, ile mianownik N ma w sobie mnożników prostych nierównych. Mając bowiem mnożniki rów-

ne wzoru $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$ dla ucalenia wyżej już przy-

toczonych przyczyn i zachowania funkcji w tym rozbiórze przy całej ogólności, ułomek $\frac{M}{(a'-b'z)^m}$ ro-

zbiera się znowu na ułomki $\frac{A}{(a'-b'z)^m} + \frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}} + \frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}} + \dots + \frac{K}{a'-b'z}$, których tyle być

powinno, ile m zamyka w sobie jedności; te bowiem ułomki dodane razem i przywiedzione do jednego mianownika, wprowadzą do licznika potęgę $m-1$, którą zamyka m terminów; wypadnie więc przywiódłszy je do zero, tyle zrównań, ile ilości nieznaných A, B, C, D , i t. d. i ogólnosć funkcji nie będąc sciesnioną żadnem zbytniem zrównaniem, zostanie nie naruszoną. Stęgo rozumowania wypada, że chcąc

funkcją ułomkową składaną rozbić na funkcye cząstkowe, których mianownik byłby drugiego potęgi n.p. $a' - b'z + c'z^2$, każdy ich licznik powinien mieć dwa terminy wzoru $A+Bz$, aby tyle wprowadzić ilości nieznanych, ile wyniknie terminów z przywiedzenia takowych ułomków do jednego mianownika, które potem, tyleż wydadzą zrównań.

Nie opuścimy nic, cokolwiek pod uwagę o funkcjach ułomkowych może teraz podpaść. Uważaliśmy funkcye przez wzgląd na mnożniki równe i nierówne w mianowniku; uważamy je iść częściej przez wzgląd na mnożniki rzetelne lub urojone: ta bowiem uwaga jest istotną funkcjom, iak prędko ich mianowniki zaczęliśmy rozbić. Luźniejszy się zupełnie odbyli co do mnożników rzetelnych, ale kiedy mianownik N będzie zamykał mnożniki urojone, iakże sobie postąpić? Wprowadziwszy który ułomek prosty urojony w ten rozbiór, cała funkcya stanie się urojoną, przywodząc ją bowiem do jednego mianownika, wmieszają się w liczniku terminy urojone, które się nie zniesą: będzie więc funkcya rzetelna równa funkcyi urojonej powstającej z dodania ułomków prostych: co jest wielką nieprzyzwoitością. Chcąc tedy uniknąć, przymuszeni jesteśmy w tym razie wszystkie funkcye cząstkowe wprowadzić rzetelne, a zatem mianownika N już nie rozbić na mnożniki 1go stopnia urojone, ale na mnożniki 2go stopnia rzetelne, które się rodzą z dwóch urojonych rozpozłożonych przez siebie. Rozebrawa więc takową funkcya na swe ułomki cząstkowe zamykać będzie między temi cząstkowymi ułomkami tyle dwoistych wzoru

$$\frac{A+Bz}{a' - b'z + c'z^2}, \text{ ile par znayduie się mnożników uro-}$$

jonych w mianowniku N . Ale mianownik dwoisty $a' - b'z + c'z^2$ jest koniecznie taki, iż jego mnożniki proste są koniecznie urojone. Zebyśmy tę kondycya mogli zawsze myśli uczynić przytomną, potrzebaby nam takiego wyrazu mianownika podwójnego, któryby

ryby nosił na sobie cechę oznaczającą, że on powstał z dwóch mnożników prostych uroionych. Ponieważ wszystkie dotąd rostrząszone początki nie mogą nam poddać takiego wyrażu, odłożyć musimy do niższych uwag rozbiór takowych funkcji: które nam podobnie trzeba będzie rozdzielić na równe i nierówne. Prześtaniemy więc teraz na uwadze tych tylko funkcji ułomkowych wymiernych, których mianownik N składa się z samych mnożników rzetelnych.

§. XXXV.

Zeby ułomek jaki rozebrać na cząstkowe ułomki, s których się składa, potrzeba w tych cząstkowych ułomkach oznaczyć liczników i mianowników. Mianowniki te proste wynaydują się przez rozbiór mianownika składanego na swe mnożniki, który odbywa się sposobem użytym na rozwiązanie równań. Wiemy bowiem że to co jest pierwiastkiem w zrównaniu, jest mnożnikiem w funkcji, więc wprowadzwszy związek w funkcję składaną $p+qz+rz^2+$ i t. d. przez uczynienie ją równą zero, otrzymamy równanie, które rozwiązawszy znajdziemy jego pierwiastki; zniszczyszy potem związek w tych pierwiastkach przerobiemy je na funkcye proste, które będą mnożnikami funkcji składanej, a oraz mianownikami ułomków prostych. Ale iakże wynaleśdź liczników na takie proste ułomki? Ponieważ w tém zadaniu nie idzie tylko o oznaczenie ilości nieznanych przez znané; pierwszy sposób, któryby nam się tu powinién stawić w myśli, jest początek pytań nieoznaczonych *Des-Carta* użyty w takim sposobie, iaki nam posłużył na początku tego rozdziału, kiedy nam trzeba było wynaydować współ-czynniki A, B, C, D , i t. d. szeregu. Doświadczmy czyli nam się tu udá.

Niech będzie do rozebrania funkcya podana:

$$\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}, \text{ będą iey ułomki cząstkowe}$$

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} + \frac{C}{1-3z} + \frac{D}{1-5z} = \frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}$$

Ms. chcąc

Sposoby ro-
zbiórania u-
łomków skła-
danych na pro-
ste.

chcąc A, B, C, D , wyrazić przez liczby, potrzeba nam przywieść 1^o członka ułamki do iednego mianownika, i przenieśćszy potem licznika drugięj strony, całe zrównanie do zero: s kąd wypadnie:

$$0 = A + 9A.z + 23A.z^2 - 15A.z^3;$$

$$-1 + B. - 3B. + 15B.$$

$$+C. - 6C. + 5C.$$

$$+D. - 4D. + 3D.$$

$$-1. - 3.$$

czyniąc w tém zrównaniu każdego współ-czynnika równym zero, otrzymamy prawdę tyle zrównań ile nieznanych: ale że w każdym s tych zrównań znaydują się wszystkie nieznané, przez wyrzucanie ich działanie znacznie się zawikie. W terażnięjszym ieszcze przypadku wyciągniemy przez eliminacyą $A=1$;

$$B = \frac{5}{8}, C = -\frac{90}{8}, D = -\frac{165}{8}. \text{ Ale jeżeli funkcya skła}$$

dać się będzie z więcéj takowych ułamków prostych, wynalazek liczników nieporównanie będzie pracowitszy. Spół więc ten, który nam służył do rozbiierania funkcyi na szereg, lubo i w terażnięjszey teoryi ma swoje użycie, przywiązany atoli iest do tych samych trudności, które nam się pokazały w eliminacyi. Ustuyemyż przyiść do łatwiejszego:

Zaczawfzy od funkcyi $\frac{M}{N}$, w których N składa się

z mnożników nierównych, nazwiemy $N = (a' - b'z)S$, gdzie $a' - b'z$ znaczy iednego prostego mnożnika; S zaś mnogość ze wszystkich innych, które wchodzą

w N ; będzie więc $\frac{M}{N} = \frac{A}{a' - b'z} + \frac{R}{S}$, gdzie $M, A,$

R, S , są konieczne ilościami całkiemi: uważając té ułamki przywiedzione do náyprościęjszego ułamko-

węgo wyrazu. Jeżeli więc $\frac{M}{(a' - b'z)S} = \frac{A}{a' - b'z} + \frac{R}{S}$ będzie

będzie $R = \frac{M-AS}{a'-b'z}$, ponieważ R jest ilością całkowitą, $M-AS$ musi być koniecznie rozdzielną przez $a'-b'z$; więc uczyniwszy $a'-b'z=0$, musi także być $M-AS=0$, skąd wypada $A = \frac{M}{S}$; wynajdziemy

więc A włożywszy w $M, S, z = \frac{a'}{b'}$ wyciągnięte z równania $a'-b'z=0$. Tym zaś sposobem, którym odkryliśmy A , wynajdziemy wszystkie inne cząstkowych ułamków liczniki. Weźmy n. p. funkcję już dawniej rozbiegającą

$$\frac{z(1-z)(1-3z)(1-5z)}{1+z+3z^2}$$

gdzie $M=1+z+3z^2, S=(1-z)(1-3z)(1-5z)$ - - -
 $a'-b'z=z$, czyli $a'=0, b'=-1$; włożywszy $z=0$

w M, S , będzie $\frac{M}{S}=1=A$. Chcąc znaleźć B ,

będzie $a'-b'z=1-3z$, czyli $a'=1, b'=3, z=\frac{1}{3}$.
 $S=z(1-5z)$; $\frac{M}{S} = \frac{5}{8} = B$. Na C będzie

$a'-b'z=1-5z, z=\frac{1}{5}, S=z(1-3z), \frac{M}{S} = \frac{5}{3}$

$S = -\frac{4}{27}, \frac{M}{S} = -\frac{9 \cdot 5}{4} = -\frac{90}{8} = C$. Na wynalezienie

D będzie $z = \frac{1}{5}, S = z(1-3z) = \frac{8}{25 \cdot 5}$

$M = \frac{33}{25}, \frac{M}{S} = \frac{165}{8} = D$. Przeto funkcję

$$\frac{1+z+3z^2}{z(1-z)(1-3z)(1-5z)} = \frac{1}{z} + \frac{5}{8(1-z)} - \frac{90}{8(1-3z)} + \frac{165}{8(1-5z)}$$

Tym samym sposobem postępując sobie z ułamkiem $\frac{1+z^2}{z-z^3} = \frac{1+z^2}{z(1+z)(1-z)} = \frac{M}{N} = \frac{A}{z} +$

$\pm \frac{B}{1+z} + \frac{C}{1-z}$, i, nadając przyzwoite wartości S , które się za każdym działaniem odменяją; znajdziemy $A=1$, $B=-1$, $C=1$, ułamki zaś proste na które się funkcję rozbiera $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}$.

Przystąpmy teraz do rozbioru funkcji na ułamki cząstkowe, kiedy N zamyka w sobie mnożniki równe. Dowiedliśmy już, że na ten czas $\frac{M}{N}$ rozebrać się może na tyle ułamków cząstkowych, ile wykładnik N zamyka w sobie jedności, to jest: że

$$\frac{M}{(a'-b'z)^m S} = \frac{A}{(a'-b'z)^m} + \frac{B}{(a'-b'z)^{m-1}} + \frac{C}{(a'-b'z)^{m-2}} + \frac{D}{(a'-b'z)^{m-3}} + \dots + \frac{K}{a'-b'z} + \frac{R}{S}$$

gdzie A, B, C, M, K, R, S , są ilościami całkowitymi; S zaś znaczy innych mnożników nierównych wchodzących w N . Przywińszy te ułamki proste do jednego mianownika, i rozmnożone przez S przenieśliśmy na jedną stronę równania, otrzymamy:

$$M - S(A + B(a'-b'z) + C(a'-b'z)^2 + \dots + K(a'-b'z)^{m-1}) = R$$

Aż R jest ilością całkowitą, więc żeby równanie to mogło mieć miejsce, licznik pierwszego członka, musi być koniecznie zupełnie rozdzielnym przez mianownika, a zatem $a'-b'z$ jest koniecznie mnożnikiem całego licznika; uczyniwszy więc $a'-b'z=0$, cały licznik stanie się zero: aże terminy wszystkie począwszy od B są mnożone przez $a'-b'z$, więc te stawały się zaraz zero, odpadną, zostawiwszy $M - AS=0$; skąd $A = \frac{M}{S}$: gdzie nam trzeba pamiętać, iż nie

wprzód $A = \frac{M}{S}$, póki w M, S , nie włożemy za z wartości

wartości wyciągnionej z równania $a' - b'z = 0$, czyli $z = \frac{a'}{b'}$. Ale iakże odkryjemy A, B, C, D , i t. d?

Nie zgubmy się tylko w naszym rozumowaniu, a łatwo tego dokażemy.

Ponieważ $M - AS$ jest zupełnie rozdzielnym przez $a' - b'z$; wykonamy dzielenie, i wieloraz stąd otrzy-

many nazwiemy T , będzie $\frac{M - AS}{a' - b'z} = T$; kiedy zaś

rozdzielimy cały ułamek przez $a' - b'z$, mianownik zmniejszy się o jeden stopień, i równanie pozostałe będzie:

$$\frac{T - S(B + C(a' - b'z) + D(a' - b'z)^2 + \dots + K(a' - b'z)^{m-2})}{(a' - b'z)^{m-1}} = R.$$

Teraz znowu R jest ilością całkową, więc znowu ułamek cały pierwszego członka musi być rozdzielnym przez $a' - b'z$, położywszy więc $a' - b'z = 0$, cały licznik będzie zero, ale niektóre w nim terminy rozmnożone przez $a' - b'z$, zaraz odpadną, zostawiwszy

$T - SB = 0$; skąd $B = \frac{T}{S}$, co nam da wartość na B ,

włożywszy w $T, S, z = \frac{a'}{b'}$. Ponieważ $T - SB$ jest

zupełnie rozdzielnym przez $a' - b'z$; wykonamy to dzielenie, i wieloraz stąd wypadający nazwiemy U ,

$U = \frac{T - SB}{a' - b'z}$, takim sposobem cały pierwszy człon

nek równania rozdzieli się znowu przez $a' - b'z$, i zostanie

$$\frac{U - S[C + D(a' - b'z) + \dots + K(a' - b'z)^{m-3}]}{(a' - b'z)^{m-2}} = R.$$

gdzie znowu R będąc ilością całkową uczyni pierwszy członek zupełnie rozdzielnym przez $a' - b'z$, a za-

tém $a' - b'z = 0$, zostawi $U - SC = 0$, skąd $C = \frac{U}{S}$: ta-

kim

kim sposobem ciągnąc nasze rozumowanie przyjdzie-
my do wynalezienia wszystkich liczników ułamków
częstkowych. W całym tem działaniu widzemy, że
S zostaje zawsze przy tej samej wartości, a samo
tylko M odменя się przez dzielenie, które za ka-
żdym wynalazkiem jesteśmy obowiązani wykony-
wać. Prawidła te wszystkie iasniey się ieszcze wy-
dadzą w przykładach.

Niech będzie $\frac{M}{N} = \frac{1+z^2}{(1-2z)^3(1+z)} = \frac{A}{(1-2z)^3}$
 $+ \frac{B}{(1-2z)^2} + \frac{C}{1-2z} + \frac{D}{1+z}$, gdzie $M=1+z^2$,
 $S=1+z$, $1-2z=0$, $z=\frac{1}{2}$, $A=\frac{M}{S}=\frac{5}{6}$, $\frac{M-AS}{1-2z}$
 $=\frac{1-5z+6z^2}{6(1-2z)}=\frac{1-3z}{6}=T$, $B=\frac{T}{S}=-\frac{1}{18}$, $\frac{T-BS}{1-2z}$
 $=\frac{4}{18}=U$, a zatem $C=\frac{U}{S}=\frac{4}{27}$. Nakoniec $D=\frac{M}{S}$,
gdzie $M=1+z^2$, $S=(1-2z)^3$, $1+z=0$, $z=-1$, a
przeto $D=\frac{2}{27}$; funkcyą więc podaną rozbięra się na
te ułamki częstkowe:

$$\frac{5}{6(1-2z)^3} - \frac{1}{18(1-2z)^2} + \frac{4}{27(1-2z)} + \frac{2}{27(1+z)}.$$

Tym samym sposobem postępując sobie w innych
przykładach, przyjdziemy do częstkowych ułamków
iakięykolwiek funkcyi składaney mającey w miano-
wniku mnożniki rzetelne, równe lub nierówne. Teo-
ryą tę tak dokładną i tak prostą rozbięrania ułam-
ków składanych na proste winniśmy W. Geometrze
Janowi Bernoullemu.

§. XXXVI.

Przypomniemy sobie teraz co nas wciągnęło w po-
trzebę rozbięrania ułamków składanych na ułamki
proste. Bawiąc się nad własnościami szeregów zwro-
tnych

nych, potrzeba nam było wynaleźć każdego w szczególności *wyraz ogólny*; ten łatwo nam się pokazał w funkcjach ułomkowych prostych wzoru $\frac{A}{1-pz}$,

Przytóżowa-
nie poprzedza-
jący teorii
do wynaydo-
wania wyra-
zów ogólnych

$\frac{A}{(1-pz)^n}$: ale chcąc naszą uwagę rościagnąć do ułomków zawikłęjszych, pokazało się że wynalazek ich wyrazu ogólnego ledwo jest podobny: potrzeba nam więc było ułamki zawikłane przerobić na proste; s tych każdy przywiódłszy do wzoru $\frac{A}{1-pz}$ bę-

dzie jego wyraz ogólny Ap^nz^n : a iako zbiór takich prostych ułomków równa się ułomkowi podanemu, tak zbiór wyrazów ogólnych na ułamki cząstkowe równy będzie wyrazowi ogólnemu funkcji podanej. Niech będzie funkcją podaną $\frac{M}{N}$, którey

ułamki cząstkowe są $\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz}$ i t. d. będzie $(Ap^n+Bq^n+Cr^n + \text{i t. d.})z^n$ wyrazem ogólnym funkcji $\frac{M}{N}$. Gdyby dwa z mnożników miano-

wnika N, były sobie równe, to jest $p=q$, mielibyśmy $\frac{A}{(1-pz)^2} + \frac{B}{1-pz}$ i pierwszego ułamku wyraz ogólny jest $(n+1)Ap^nz^n$; drugiego Bp^nz^n , kładąc za $A+B$,

B , B ; będzie wyraz ogólny ułamku $\frac{M}{N}$, $[(nA+B)p^n + Cr^n]z^n$ i t. d. Jeżeli w N trzy mnożniki są równe, to jest $p=q=r$, jego wyraz ogólny będzie $\frac{(n+1)(n+2)}{2}Ap^nz^n$; ale jeżeli oprócz tych trzech ró-

wnych znayduie się jeszcze który nierówny, rozbiór na ten

na ten czas ułomku $\frac{M}{N}$ na ułomki proste staie się potrzebny; ten rozbiór, nie może nas przyprowadzić tylko albo do wzoru $\frac{A}{1-pz}$ albo do $\frac{A}{(1-pz)^n}$; każdego z osobna, znając wyraż ogólny, znaydziemy wyraż ogólny samey funkcyi składanej $\frac{M}{N}$. Zobaczymy to w przykładach:

I. Niech będzie szereg $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+\dots$ i t. d. powstający s funkcyi ułomkowej $\frac{1+2z}{1-z-z^2}$, iakiż iego wyraż ogólny?

Wynaydziemy najprzód mnożniki mianownika u, czyniwszy $1-z-z^2=0$, co nam da $z+\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, i

$z+\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, zgubiwszy związek; te dwa mnożniki chcąc ie przywieść do wzoru $1-pz$, mnożę pierwszego przez $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, i odmieniwszy znaki wypadnie

$1-\frac{(1-\sqrt{5})}{2}z$; drugiego rozmnożywszy przez $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, otrzymamy $1-\frac{(1+\sqrt{5})}{2}z$, które mają wzór

$1-pz$; będzie więc $\frac{1+2z}{1-z-z^2} = \frac{A}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)z} +$

$\frac{B}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)z}$, szukając liczników podług dopiero wy-

łożonych prawideł znaydziemy $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $B =$

$B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, przeto wyraż ogólny $(Ap^n + Bq^n)z^n$ w

teraźniejszym przykładzie położywszy $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, będzie: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} z^n$

II. Wynaleśdź wyraż ogólny szeregu $1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+$ i t. d. wypadającego z ułamku

$\frac{1}{1-z-z^2+z^3} = \frac{1}{(1-z)^2(1+z)}$, ułomek ten rozbióra

się podług sposobu podanego na tę proste:

$\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1-z} + \frac{\frac{1}{4}}{1+z}$, pierwszego wyraż ogólny

jest $\frac{n+1}{2} z^n$, drugiego $\frac{1}{4} z^n$, trzeciego $\frac{1}{4} (-1)^n z^n$, a więc

wyraż ogólny szeregu podanego jest: $\frac{2n+3+(-1)^n}{2} z^n$.

znak wyższy należy w nim do liczby n parzystej, niższy zaś do nieparzystej.

Zbierzmy teraz na uwagę tę prawdę, którąśmy o wyrażach ogólnych dostrzegli. Każdy ułomek prosty

wzoru $\frac{A}{1-pz}$, przyprowadził nas do wyrażu ogólnego $Ap^n z^n$, któryśmy oznaczyli przez licznika ułamku A , i przez współczynnika nieznaney z ; ponieważ wyraż ogólny zamyka w sobie każdy termin szeregu wypadający za nadaniem wartości n , zamyka razem związek zachodzący między terminami szeregu i między licznikami ułamków prostych A, B, C , i t. d. s tego więc związku można wyciągnąć wartość liczników przez współczynniki szeregowé równając termin szeregu, z wypadającym tego samego porządku terminem z wyrażu ogólnego. Zeby się nie mylić w znaczeniu, wyrażać odtąd będziemy przez A, B, C, D , i t. d. liczniki ułamków prostych przez które dany

Tłómaczy się
związek między
licznika-
mi ułamków
prostych i ter-
minami szere-
gu.

Jeżeli dany bywa wyraz ogólny; przez \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , i t. d. znaczyć będziemy współczynniki szeregu powstającego z jakiegokolwiek ułamku. Niech więc

$$\bar{A} + \bar{B}z + \bar{C}z^2 + \bar{D}z^3 + \bar{E}z^4 + \dots + \bar{P}z^n + \bar{Q}z^{n+1} + \bar{R}z^{n+2} + \dots + \bar{X}z^{2n} + \bar{Y}z^{2n+1} + \bar{Z}z^{2n+2} \text{ i t. d. } (\Psi)$$

znaczy szereg powstający z rozbięcia jakiegokolwiek funkcji ułamkowej. Jeżeli ta funkcja była prosta

$\frac{A}{1-pz}$, pierwszy jej termin wyciągniemy z wyrazu ogólnego $Ap^n z^n$ uczyniwszy $n=0$, s. kąd wypadnie $A=\bar{A}$ to jest; że pierwszy takowy termin jest zawsze równy licznikowi ułamku. Jeżeli ta funkcja

rozbiera się na dwa ułamki proste $\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz}$,

jej wyraz ogólny jest $(Ap^n + Bq^n)z^n$, zachodzą nam w tym przypadku dwa liczniki A , B , do oznaczenia, na co potrzeba dwóch zrównań; wyciągniemy te dwa zrównania z wyrazu ogólnego za nadaniem dwóch różnych wartości n , a zatem licznik każdy oznaczać się będzie przez dwa współczynniki początkowych terminów szeregu; to jest uczyniwszy w wyrazie ogólnym $n=0$, wypadą $\bar{A} = A + B$, - - (a), uczyniwszy potem $n=1$, otrzymamy $Ap + Bq = \bar{B}$ - - - (b)

kombinujemy (a) z (b), to jest mnożymy naśmprzód (a) przez q , i odciagniemy od niego (b), wypadnie:

$$A = \frac{Aq - B}{q - p} \quad \text{Mnożmy powtórę (a) przez } p, \text{ i od}$$

$$\text{trącmy od niego (b), co nam da } B = \frac{Ap - \bar{B}}{p - q}$$

mamy więc liczników ułamków prostych A , B , wyrażonych przez dwa początkowe terminy szeregu \bar{A} , \bar{B} , i przez stopnie stósfunku p , q . Jeżeli funkcja ułamkowa rozbiera się na trzy proste, potrzeba nam na oznaczenie trzech ilości nieznanych, tyleż zrównań, które wyciągniemy z wyrazu ogólnego, na-

dawszy

dawszy trzy różne wartości n : będzie więc w tym przypadku każdy licznik ułamku prostego wyrażony przez trzy początkowe terminy szeregu, i przez sto-
pnie związku p, q, r . Zgoła tylé nam potrzeba w tém dochodzeniu zrównań, na ile ułamków prostych rozbiéra się funkcyá składaná: té zrównania otrzymu-
iémy z wyrazu ogólnégo, który nam ich podług po-
trzeby może dostarczać: idzie więc zatém, że z iakie-
gokolwiek ułamku składanégo rodzących się ułam-
ków prostych liczniki możemy wyrazić przez
początkowe współ-czynniki terminów szeregowych:
liczba tych współ-czynników taka będzie wchodzić
w wyraz każdego licznika, iaká jest liczba ułamków
prostych, na które się funkcyá rozbiéra. Co oczywi-
ście wypáda z uwagi nad szeregami i odpowiadają-
cemi im wyrazami ogólnémi.

§. XXXVII.

Ponieważ każdy termin szeregu wyciągając go z
wyrazu ogólnégo oznaczamy przez liczniki ułamków
prostych, té zaś liczniki potrafiémy wyrazić przez
początkowe terminy szeregu, więc możemy każdy
náyodlegléjszy termin szeregu wyrazić przez terminy
początkowe. Jeżeliśmy więc w szeregach zwrotnych
potrzebowali pewnéj liczby tuż poprzedzających ter-
minów, możemy tę liczbę tuż poprzedzających ter-
minów zmniejszyć, a na ich miéyscé wprowadzić
początkowe terminy szeregu. S kąd nam wypáda
następujące do rozwiązania zadanie: „Jeżeli szeregu
„zwrotnégo termin każdy zawiśt od liczby pewnéj
„tuż poprzedzających, wyrazić téń sám termin przez
„liczbę mniéyszą tuż poprzedzających,

Zacniemy od náyprościéjszych szczególnych przy-
pádków. Dáymy n.p. że szereg zwrotny powstát z
ułamków mianownika $1 - a'z + b'z^2$, każdy więc w
nim termin zawiśt od dwóch tuż poprzedzających, tak
dalece, że n. p. $C = a'B - Ab'$. Jeżeli ułamek téń

składaný rozbiéra się na dwa proste $\frac{A}{1 - pz} + \frac{B}{1 - qz}$,
Na będzie

S poprzedza-
jących uwig
wypádaia no-
we własności
zwrotnych
szeregów co
do związku
terminów.

będzie $a' = p+q$, $b' = pq$, a wyraż ogólny takiego szeregu $(Ap^n + Bq^n)z^n$. Chcąc s tego wyrazu wyciągnąć terminy szeregu \bar{P} , \bar{Q} , znajdziemy $\bar{P} = Ap^n + Bq^n$, $\bar{Q} = Ap \cdot p^n + Bq \cdot q^n$. Zważywszy dobrze zadanie nasze, zobaczymy iż w niem o więcej nie idzie tylko o wynalezienie zrównania między \bar{P} , \bar{Q} . Kombinujemy więc dwa ostatnie s sobą, a otrzymamy:

$\bar{P}q - \bar{Q} = A(q-p)p^n - \bar{P}p - \bar{Q} = B(p-q)q^n$. Które rozmnożywszy przez się, i włożywszy za $p+q$, a' ; za pq , b' ; za $-p^2 - q^2 + 2pq = -[(p+q)^2 - 4pq]$ $= -[a'^2 - 4b']$, czyli $4b' - a'^2$; otrzymamy

$$\bar{P}^2 b' - \bar{P} \bar{Q} a' + \bar{Q}^2 = AB(4b' - a'^2)b'^n. \quad (K).$$

a ponieważż liczniki ułamków prostych A, B , wyraziliśmy byli przez początkowe współczynniki szeregu,

$$A = \frac{\bar{A}q - \bar{B}}{q - p}, \quad B = \frac{\bar{A}p - \bar{B}}{p - q}, \quad \text{będzie}$$

$$AB = \frac{\bar{A}^2 b' - \bar{A} \bar{B} a' + \bar{B}^2}{4b' - a'^2}, \quad \text{włożywszy tę wartość za}$$

A, B , w zrównanie (K) wypadnie:

$\bar{P}^2 b' - \bar{P} \bar{Q} a' + \bar{Q}^2 = (\bar{A}^2 b' - \bar{A} \bar{B} a' + \bar{B}^2)b'^n$. Zrównanie 2go stopnia, które rozwiązawszy otrzymamy:

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \bar{P} a' + \sqrt{[(\frac{1}{4} a'^2 - b')\bar{P}^2 + (\bar{A}^2 b' - \bar{A} \bar{B} a' + \bar{B}^2)b'^n]}$$

jeżeli więc termin iaki szeregu zwrotnego zawisł od dwóch tuż go poprzedzających, wyrazić go możemy tylko przez jeden, ale na ten czas rozwiązać nam trzeba zrównanie 2go stopnia. To zrównanie daleko nam ogólniey rozwiązuie nasze żądanie, niżesmy ie poieli, bo mając dwa pierwiastki, daie nam nie tylko termin tuż następujący, ale i tuż poprzedzający \bar{P} ; pierwszy wypadnie, biorąc znak dodatny przed cechą pierwiastkową, drugi zaś, biorąc znak odjemny. Ponieważ zaś w terażniejszyem zadaniu nie idzie, tylko o termin tuż następujący po \bar{P} , dla tego położyliśmy tylko sam znak dodatny przed cechą pierwiastkową. Lubo \bar{Q} zamyka w sobie wyraż pierwiastkowy

stkowy, że że jednak nie mamy do czynienia tylko s samemi terminami wymiernemi; \bar{Q} będzie koniecznie wymiernem, i funkcją pod znakiem pierwiastkowym jest koniecznie zupełną potęgą drugą.

Mając szereg powstający z ułamku mianownika $1 - a'z + b'z^2 - c'z^3$, którego ułamki cząstkowe są

$$\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz}, \text{ wyraż zaś ogólny}$$

$(Ap^n + Bq^n + Cr^n)z^n$, gdzie $a' = p + q + r$, $b' = pq + pr + qr$, $c' = pqr$: każdy termin w takowym szeregu zawisnie od trzech poprzedzających tak dalece: że $\bar{R} = a'\bar{Q} - b'\bar{P} + c'\bar{O}$: chcąc \bar{R} wyrazić przez dwa tylko poprzedzające \bar{Q} , \bar{P} , a działając tym co wyżej sposobem, będzie: $\bar{P} = Ap^n + Bq^n + Cr^n$, $\bar{Q} = Ap.p^n + Bq.q^n + Cr.r^n$, $\bar{R} = Ap^2.p^n + Bq^2.q^n + Cr^2.r^n$; S tych trzech równań między sobą tak iak przdtm kombinowanych wypadnie równanie 3go stopnia uczące nas, że jeżeli termin szeregu zwrotnego zawisł od trzech poprzedzających, wyrażemy go przez dwa tylko; ale na ten czas rozwiązać muszemy równanie 3go stopnia. A spodobieństwa działań wnosząc podobieństwo wypadków na inne szeregi, powinniśmy widzieć w samych początkach tę ogólną prawdę: że jeżeli termin szeregu zawisł od m tuż poprzedzających, chcąc go wyrazić przez liczbę $m-1$, wpadamy na równanie stopnia m , które iakokolwiek pokaże się niewymierne i zawikłane, zawsze jednak po nadanych przyzwolonych wartościach ilościom w nie wchodzącym stanie się wymiernem.

Zatrzymawszy się nad świeżo odkrytymi własnościami szeregów zwrotnych, dostrzeżemy nawet; że każdy termin w takowym szeregu może się przez iakiékolwiek s poprzedzających wyrazić. Każdy bowiem wyraża się przez tuż poprzedzające, więc kładąc za jedné poprzedzające ich znowu wartości w drugich poprzedzających, możemy od iakiékolwiek terminu cofnąć się aż do początkowych, i wyrazić

N₃ go przez

go przez funkcją początkowych lub iakichkolwiek innych poprzedzających go w szeregu. Rachunek przez eliminacją mógłby nas o tém náowczywiście przekonać, który ażeby sobie skrócić, użyjmy znowu naszego początku §. 9. Weźmy w szeregu (ψ) termin mający iakiś stółunek z odległéjszym na odwrot w w szeregu, n. p. $\bar{X}z^{2n}$, którego wykładnik dwa razy więkfszy od $\bar{P}z^n$, więc chcąc \bar{P} wprowadzić w wyraz \bar{X} , z natury wykładników musi \bar{P} byđz wyniesione do potęgi drugiej; wprowadziwszy więc trzy niewiadome ilości f, g, h , do oznaczenia trzech terminów potęgi drugiej, będzie

$$\bar{X} = f\bar{P}^2 + g\bar{P}\bar{Q} - hABb'^n \quad (c)$$

ponieważ zaś wyráz ogólny daie nám, $\bar{P} = Ap^n + Bq^n$
 $\bar{Q} = Ap.p^n + Bq.q^n$ $\bar{X} = Ap^{2n} + Bq^{2n}$ (d)
 kładąc w (c) za \bar{P}, \bar{Q} iego wartości, i tak przerebioné równaiąc z (d), otrzymamy tyle zrównań ile terminów, które nám posłużą na oznaczenie trzech wprowadzonych nieznaných ilości.

$$\begin{aligned} f\bar{P}^2 &= fA^2.p^{2n} + fB^2.q^{2n} + 2fAB.b'^n \\ g\bar{P}\bar{Q} &= gA^2p.p^{2n} + gB^2q.q^{2n} + gABa'.b'^n \\ -hABb'^n &= -hAB.b'^n \end{aligned}$$

równaiąc drugiego członka terminy podobné z (d),

$$\text{znáydziemy: } f + gp = \frac{1}{A}, \quad f + gq = \frac{1}{B},$$

$$2f + ga' - h = 0, \text{ a przeto } g = \frac{B-A}{AB(p-q)}, \quad f = \frac{Ap-Bq}{AB(p-q)}.$$

$$\text{Ażé z wyższych zrównań } B-A = \frac{\bar{A}a' - 2\bar{B}}{p-q},$$

$$Ap-Bq = \frac{\bar{B}a' - 2\bar{A}b'}{p-q}, \quad AB(a'a' - 4b'b') =$$

$$\rightarrow (\bar{A}^2b' - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2); \text{ włożywfzy té wartości w}$$

$$g, f, h, \text{ wypadnie: } g = \frac{2B - \bar{A}a'}{\bar{A}^2b' - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2};$$

$$f =$$

$$f = \frac{2\bar{A}b' - \bar{B}a'}{\bar{A}^2b' - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2}, \quad h = \frac{(4b' - a'a')\bar{A}}{\bar{A}^2b' - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2},$$

$$\text{więc } \bar{X} = \frac{(2\bar{A}b' - \bar{B}a')P^2 + (2\bar{B} - \bar{A}a')P\bar{Q}}{\bar{A}^2b' - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2} - Ab'^n \quad (e)$$

W tém ostatniém zrównaniu znajduje się b'^n , gdzie wykładnik n należy do \bar{P} ; żebyśmy mieli wyraz terminów przez odleglejsze sposobem náyogólniejszym którybyśmy rościagnąć mogli do innych jakichkolwiek, trzebaby nam wyrzucić b'^n , a zatem znaleśdź drugie zrównanie na \bar{X} ; możemy więc jeszcze położyć $\bar{X} = fP^2 + gQ^2 - hABb'^n$, a działając tak, iak przedtém znajdziemy:

$$\bar{X} = \frac{[a'b'\bar{A} - (a'a' - 2b')\bar{B}]\bar{P}^2 + (2\bar{B} - a'\bar{A})\bar{Q}^2 - 2\bar{B}b'^n}{a'(\bar{A}^2b' - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2)} - \frac{2\bar{B}b'^n}{a'} \quad (m)$$

za pomocą dwóch zrównań (e), (m), wyrzuciwszy b'^n , otrzymamy:

$$\bar{X} = \frac{(\bar{A}b' - \bar{B}a')\bar{P}^2 - \bar{A}\bar{Q}^2 + 2\bar{B}\bar{P}\bar{Q}}{\bar{B}^2 - a'\bar{A}\bar{B} + b'\bar{A}^2} \quad (n)$$

to zrównanie służyć nam może za wzór do wyrażenia iakiegokolwiek terminu przez inny poprzedzający z wykładnikiem półową mniejszym: n. p. w szeregu (ψ) $\bar{Z}z^{2n+2}$ wyrazić możemy przez \bar{Q} , \bar{R} , kładąc \bar{Q} za \bar{P} ; \bar{R} za \bar{Q} w zrównaniu (n): będzie więc

$$\bar{Z} = \frac{(\bar{A}b' - \bar{B}a')\bar{Q}^2 - \bar{A}\bar{R}^2 + 2\bar{B}\bar{Q}\bar{R}}{\bar{B}^2 - a'\bar{A}\bar{B} + b'\bar{A}^2}$$

A ponieważ $\bar{R} = a'\bar{Q} - b'\bar{P}$ uważając szereg (ψ) iako powstający z ułamku mianownika $1 - a'z + b'z^2$; włożymy tę wartość za \bar{R} , wypadnie:

$$\bar{Z} = \frac{(\bar{A}b' - \bar{A}a'a' + \bar{B}a')\bar{Q}^2 + 2b'\bar{P}\bar{Q}(\bar{A}a' - \bar{B}) - b'b'\bar{A}\bar{P}^2}{\bar{B}^2 + a'\bar{A}\bar{B} + b'\bar{A}^2} \quad (p)$$

Mając \bar{Z} , \bar{X} , znajdziemy frzodkujący między niemi

termin \bar{Y} w szeregu (ψ). Mamy bowiem $\bar{Z} = a'\bar{Y} - b'\bar{X}$. więc $\bar{Y} = \frac{\bar{Z} + b'\bar{X}}{a'}$ to jest:

$$\bar{Y} = \frac{(\bar{B} - \bar{A}a')\bar{Q}^2 + 2b'\bar{A}\bar{P}\bar{Q} - b'\bar{B}\bar{P}^2}{b'\bar{A}^2 - \bar{A}\bar{B}a' + \bar{B}^2} \quad (q).$$

Mamy więc \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} wyrażone przez \bar{P} , \bar{Q} ; ciągnąc dalej ten rachunek przyzlibyśmy jeszcze do wyrażenia dalszych iakichkolwiek terminów przez \bar{P} , \bar{Q} ; a iako \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} , znaczyć mogą iakiękolwiek terminy wykładników parzystych albo nieparzystych, tak iako \bar{P} , \bar{Q} , iakiękolwiek poprzedzające; pokazuje się oczywiście, że w szeregu zwrotnym powstałym z ułomku, można iakikolwiek bądź termin wyrazić przez dwa iakiękolwiek s poprzedzających, między którymi mieszają się jeszcze same początkowe; a zatem w szeregu zwrotnym termin iakikolwiek bydy może uważany iako funkcją pewną iakichkolwiek s poprzedzających. Gdyby nas nawet rachunek był o tęg prawdzie nie zapewnił, powinniśmy ią byli s próstę uwagi nad naturą szeregów zwrotnych wyciągnąć, i dla tego luboby náleżało do innych jeszcze zwrotnych szeregów to dociekanie roszszerzyć; że iednak każdy będzie w stanie iść w tęg za dopiero pokazaną drogą, przestaniemy teraz na samym przykładzie objaśniającym to, cośmy w ostatnich zrównaniach zamknęli.

Niech będzie szereg zwrotny $3 + 7x + 18x^2 + 47x^3 + 123x^4 + 322x^5$ i t. d. -- $+ Px^n + Qx^{n+1}$ i t. d; powsta-

iący z ułomku $\frac{3-2x}{1-3x+x^2}$, będzie w nim $\bar{A}=3$,

$\bar{B}=7$, $a'=3$, $b'=1$. $\bar{Q} = \frac{3}{2}\bar{P} + \sqrt{\frac{5}{4}\bar{P}^2 - 5}$, a iezeli

$P=123$, $n=4$, wynaydziemy $\bar{Q}=322$.

Współ-czynnik terminu x^{2n} -- $\bar{X} = \frac{-14\bar{P}\bar{Q} + 24\bar{P}^2 + 3\bar{Q}^2}{5}$
Współ-

Współ-czynnik terminu x^{2n+1} .. $\bar{Y} = \frac{3\bar{Q}^2 + 7\bar{P}^2 - 6\bar{P}\bar{Q}}{5}$

Współ-czynnik terminu x^{2n+2} .. $\bar{Z} = \frac{3\bar{P}^2 - 3\bar{Q}^2 - 4\bar{P}\bar{Q}}{5}$

§. XXXVIII.

Zwiążmy teraz to, co nam się z uwagi nad szere-
gami pokazało. W nich chcąc odkryć wyraz ogólny,
musieliśmy mianownika rozbić na swe mnożniki,
s których powstawały ułamki cząstkowe. Potrafili-
śmy przez dopiero poprzedzający §. liczniki ułam-
ków prostych oznaczać przez początkowe terminy
szeregu: gdybyśmy iść jeszcze przez terminy szeregu mo-
gli mianowniki ułamków prostych wynaleść, mie-
libyśmy nowy sposób rozbić funkcji składanej
na swe mnożniki. Dotąd bowiem ten rozbiór czyni-
liśmy za pomocą równań, który tak daleko tylko
może się rościagnąć, iak daleko nasze wiadomości o
równaniach zasiągają. S kąd łatwo każdy sobie
wniesie, że gdyby teoria szeregów nauczyła nas spo-
sobu innego wynaydowania mianowników ułamków
prostych, nauczyłaby nas także sztuki dochodzenia
pierwiastków iakiegokolwiek równania. Mianowni-
ki ułamków prostych wyrażaliśmy wzorem $1-pz$,
mając więc p , mamy to wszystko co do odkrycia
mnożnika prostego w funkcji, a w równaniu do
odkrycia pierwiastku należy. Szukamy czyli ter-
miny iakiegokolwiek szeregu nie odkryją nam wár-
tości na p .

Teorya szere-
gów zwro-
tnych prowa-
dzi nas do wy-
naydowania
pierwiastków
bliskich prz-
widy w zró-
wnaniu.

Dámy że funkcją składaną $\frac{M}{N}$ rozbić się na u-
łamki cząstkowe $\frac{A}{1-pz} + \frac{B}{1-qz} + \frac{C}{1-rz} + i$ t. d. a
zatem $N = (1-pz)(1-qz)(1-rz)$ i t. d. wyrazem
zaś ogólnym téj funkcji iest: $(Ap^n + Bq^n + Cr^n + i$ t. d.) z^n
 $= \bar{P}z^n$: drugi po nim następujący termin w szere-
gu, má wyraz ogólny $(Ap.p^n + Bq.q^n + Cr.r^n + i$ t. d.) z^{n+1}
 N_1 $=$

$=Q^{n+1}$, gdybyśmy chcieli s tych dwóch wyrazów wyciągnąć wartość na p , potrzebaby, albo q, r , i t. d. wyrazić przez p , co jest rzeczą barzo trudną; albo żeby q, r , i t. d. w terminach całkiem znikły. Gdybyśmy nawet potrafili q, r , wyrazić przez p , niewielebyśmy na tém zyskali; bo wpadłszy na zrównanie stopnia n , niebylibyśmy w stanie rozwiązać je. Zeby zaś q, r , i t. d. zniknąć mogły przed p , potrzebaby *naprzód*: aby q, r , były barzo małe względem p ; *potworé*: aby n było liczbą nieskończenie wielką; wiemy bowiem z Arytmetyki, że liczby nierówne tém się barziej od siebie w wartości oddalają, im do wyższej potęgi bywają podniesione; gdyby więc p było większe od q, r , w wyższych potęgach corazby je barziej przewyższało, tak dalece, że w potęgach n nieskończenie wielkiej, q, r , zupełnieby znikły w porównaniu p . Zniknąwszy q, r , zostanie się z wyrazów ogólnych $Ap^n = \bar{P}$, $Ap.p^n = \bar{Q}$, więc -

$\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} = p$, to jest: że termin nieskończenie odległy w

szeregu, rozdzielony przez poprzedzający, dałby wartość na p zupełną. Jeżeli zaś n nie będzie liczbą nieskończenie wielką; q, r , nie znikną całkiem przed p , ale tém będą od niego mnieysze, im n będzie większym; jeżeli więc za n weźmiemy liczbę znacznie wielką, a malejące barzo q, r , opuścimy; będziemy mieli tylko wartość bliską prawdy na p ,

uczyniwszy $\frac{\bar{Q}}{\bar{P}} = p$, to jest: jeżeli wzięmy w szeregu barzo odległe terminy, i ieden z nich rozdzielimy przez poprzedzający, otrzymamy za wieloraz p ;

s którego $1 - pz$ da mnożnika funkcyi: ten przerobijony na zrównanie przez wprowadzony związek,

wyda $1 - pz = 0$, $z = \frac{1}{p}$, jeżeli więc p było nay-

większym mnożnikiem podług naszego przypuszczenia,

nia, $z = \frac{1}{p}$ będzie pierwiastkiem tego równania náy-
 mniejszym, ale tylko bliskim prawdy.

Stych barzo prostych uwąg wyciągnął W. Geome-
 tra Daniel Bernoulli sposób wynaydowania pierwia-
 stków bliskich prawdy i podał go w tomie III. Pa-
 miętników Pétérzburških, którego nám tu użycie
 przypadá z dokładnością wyłożyć. Spóśb ten iak
 nám się dopiéró pokázal, potrzebuie koniecznie, aby
 równanie podané do rozwiązania obrocié na mia-
 nownika ułomku; s tego potém zrobić szereg nie-
 skończony, którego dwa odległe terminy przez się
 rozdzielone dadzą pierwiastek náy mniejszy, ale tyl-
 ko bliski prawdy. Dámy więc że takowém zró-
 wnaniem iest $N=0$, zniszczywszy w niem związek,
 będzie N funkcyą, i oráz mianownikiem, a iego
 współ-czynniki stopniami stóśunku, od których war-
 tość terminów w szeregu zawiśia. Nie mając ozna-
 czonego licznika takowého ułomku, weźmy począt-
 kowe terminy szeregu podług upodobania; wiemy
 bowiem z §. 32. że licznik ułomku rozebranego ná
 szereg, nie wpływa tylko w wartość tyłu początko-
 wych terminów szeregu, ile on sám má terminów w
 sobie; s tych początkowych od upodobania termi-
 nów ułożemy inśze s stopniów stóśunku, a posuną-
 wśzy té terminy daleko, rozdzielémy náyodlegléy-
 szy przez tuż go poprzedzaiący, co nám dá wartość
 na p , a z niéy $z = \frac{1}{p}$, pierwiastek náy mniejszy zró-
 wnania.

Przyktád 1wśzy. Wynaleśdź pierwiastek náy mniey-
 szy zrównania; $1 - 15z + 66z^2 - 80z^3 = 0$:

Będzie: $\frac{M}{1 - 15z + 66z^2 - 80z^3}$, s tego ułomku po-
 wśtanie szereg, którego każdy termin będzie funkcyą
 trzech poprzedzaiących; stopnie zaś stóśunku są 15,
 66, 80, tak dalece, że n. p. $Q = 15P - 66O + 80N$; $P,$
 $N,$ $Q, N,$

\bar{O}, \bar{N} , znaczą terminy szeregu zaraz poprzedzające \bar{Q} ; wzięwszy więc trzy początkowe terminy od upodobania, n. p. 1, 2, 6, wypadnie szereg:

$$1, 2, 6, 38, 334, 2982, 25726, 215798, \text{ i t. d. } s \text{ kąd}$$

$$\frac{215798}{25726} = 8,39221 = p. \text{ gdybyśmy ten szereg dalej}$$

ciągli, ułomek dziesiątkowy 39221 corazby malał, a pierwiastek przez to corazby się powiększał, tak dalece, iżbyśmy w odleglejszych terminach trafili na

$$p=8 \text{ blisko; a zatem na } z=\frac{1}{p}, \text{ blisko } \frac{1}{8}, \text{ który}$$

jest prawdziwym najmniejszym pierwiastkiem równania podanego.

Przykład 2gi. Niech będzie podane równanie:
 $7-16z+77z^2-134z^3+72z^4=0$, wyaleśdź jego pierwiastek najmniejszy?

Ponieważ równanie jest 4go stopnia, więc w szeregu s tąd powstającym każdy termin zawiść od czterech poprzedzających, to jest: $Q=16P-77O+134N-72M$; wzięwszy cztery początkowe terminy od upodobania, otrzymamy szereg liczb:

$$0, 1, 1, 2, 136, 2084, 23068, 215700, \text{ i t. d. } \text{zaczęm}$$

$$\frac{215700}{23068} = 9,351 = p: \text{ więc } z = \frac{1}{p} = \frac{1}{9,351}, \text{ to jest}$$

pierwiastek najmniejszy jest bliki $\frac{1}{9}$.

Gdybyśmy zaś chcieli równania podanego odkryć pierwiastek największy, potrzebaby nam ie przerobić na inne, którego by pierwiastek najmniejszy, był największym równania podanego, to jest trzeba u-

czynić $z = \frac{1}{x}$, a tak równanie na x , przerobiemy

$$\text{na } - - - x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \text{ i t. d. } + k = 0.$$

szukając potem tego ostatniego równania pierwiastku,

$$\text{znajdziemy } x = \frac{1}{p}, \text{ a s tąd } z = p, \text{ pierwiastek}$$

największy.

Mając

Mając n. p. równanie podane: $24 - 35z + 12z^2 - z^3 = 0$, a uczyniwszy w niem $z = \frac{1}{x}$ przerobiemy je

na $1 - 12x + 35x^2 - 24x^3 = 0$. s którego powstanie szereg liczb: 1, 1, 5, 49, 437, 3649, 29669, 238801, i t. d.

zaczętem $\frac{238801}{29669} = 8,015133 = p = z$, to jest, że pier-

wiąstek największy równania podanego jest bliski 8: gdybyśmy dalej ciągli szereg liczb: trafilibyśmy na liczbę mniejszą od znalezionej, któraby się nie-
zmienne mało różniła od 8, prawdziwego pierwiastku równania.

Mając przytomne w myśli te wszystkie początki uwag nad sposobem rozumowania, s którychśmy teraznięszą wypro-
wadzili naukę, przyznamy, że ten sposób nie barzo dziającym.

nám się uda, kiedy równanie zawierać będzie pierwiastki barzo sobie bliskie, tak dalece, że w wyższych potęgach ich wzrost mało się co różni, a zatem nie można w tym przypadku jednego s takich pierwiastków brać za niknący w porównaniu drugiego. Na ten czas potrzeba nam koniecznie przerobić równanie podane na inne, w którymby dwa te bliskie sobie pierwiastki koniecznie się barzięj różniły: czego dokážemy kładąc w niem za ilość nieznana inną powiększoną lub zmniejszoną iakakolwiek liczbą k; s kąd powstanie równanie mające za najmniejszy pierwiastek to tylko, co brakuje k do pierwiastku prawdziwego. Mając n. p. równanie podane: $z^3 - z^2 + 5z + 5 = 0$, którego największe dwa pierwiastki są $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, niczem się od siebie prócz znaku nie różniące: gdybyśmy w niem podług podanego sposobu działali, trafilibyśmy na szereg: 1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, i t. d. s których żadne dwie przyległe liczby, nie dają pierwiastku wzmiankowanego. Przełępując zaś o jeden termin, i dzieląc każdy przez wtóry przed nim idący, znaydziemy kwadrat pierwiastku szukanego, to jest:

$$\frac{1563}{313} =$$

$$= \frac{938}{188} = \frac{313}{63} = 5, \text{ co nam daie widzieć, że ile ra-}$$

zy taki trafi się liczb szereg, którego terminy, wwszytkie na przemian daia ten sam wielo-ráz; zrównanie go wydaiać, zamyká koniecznie pierwiastki te same, lecz z znakiem przeciwnym. Uczyniwszy zaś w zrównaniu podaném $z=y+2$, przerobiemy ie na: $1-3y+5y^2-y^3=0$. s którego powstanie szereg liczb:

1, 1, 1; 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, i t. d. skąd:

$$\frac{2585}{10945} = 0, 2361 = y, z = 2, 2361, \text{ co iest bliskie } \sqrt{5}.$$

Sposób Newtona prowadzący do pierwiastków zrównania coraz bliższych prawdy.

Sztuka ta rozdzielenia pierwiastku w zrównaniu daleko ieszcze rozlegleysze może mieć użycie: doszedłszy n. p. przez iakikolwiek sposób pierwiastka bliższego w zrównaniu, a chcąc to zbliżenie dalej posunąć, powiększamy nasz pierwiastek liczbą nieznaną k , której potem wyciągnąwszy wartość z zrównania, otrzymujemy przydatek do pierwszego pierwiastku, zbliżaiący nas barzię do prawdy.

Niech będzie n. p. zrównanie $x^3+5x+7=0$, którego bliski pierwiastek przez iakikolwiek sposób znalazłszy równy $-1, 1$ a chcąc doysdź bliżę prawdy, kładę $x = -1, 1+k$; k znaczy tu ułomek maiący bydź dodany do $-1, 1$; tę wartość za x położywszy w zrównaniu $x^3+5x+7=0$, przerobiemy ie na:

$k^3-3,3k^2+8,63k+0,169=0$. a ponieważ k iest ułomkiem mnieyszym od 0, 1; k^3, k^2 , będą mnieyszymi od 0, 001, 0, 01; przeto możemy ie całe opuścić: zostanie

$$\text{fię więc: } 8,63k+0,169=0, \text{ a zatem } k = -\frac{0,169}{8,63}$$

$= -0,019$. Pierwiastek więc zrównania podanego bliższy, będzie $x = -1,1+k = -1,119$. Chcąc ieszcze doysdź bliżę, czynię $x = -1,119+u$, a włożywszy tę wartość w zrównanie podane przerobię ie na u , w którym opuściwszy u^3, u^2 , zostanie nam $8,756483u+0,003831842=0$, skąd $u = -0,00044$; $x = -1,119+u = -1,11944$; tym sposobem moglibyśmy ciągnąć nasz zbliżanie do barzo wielu czastek dziesiąt-

kowych.

rowych. Nawet w przerobionych zrównaniach na z, u , moglibyśmy nie opuszczać tylko z^3, u^3 , a pozostałe zrównanie 2go stopnia rozwiązawszy, trafilibyśmy prawie na te same wypadki.

Ten sposób barzo wygodny należałoby nam rozległy wyłożyć, ale jego zrozumienie tak jest proste i łatwe, iż przywiedziony przykład może nam wystarczyć do nauczania nas jego w jakimkolwiek zrównaniu. Newton najpierw go podał w swęj Arytymetyce powiszechnęj, a przytóżowanie go teraz nięysze do teoryi Bernoullego jest tylko szczególnym tego sposobu przypadkiem.

Drugą uwagą którą nam się w użyciu teoryi Bernoullego stawić powinna, siera się do pierwiastków zrównania równych. Pamiętajmy że $\frac{Q}{p} = p$ wypa-

Teorya Bernoullego nie służy, kiedy zrównanie ma pierwiastki równe.

dło nam z wyrazu ogólnego szeregu, w którym inne ilości q, r , i t. d. uważaliśmy jako nierowne i nieknaące w porównaniu z p . Przypuśćmy teraz że mianownik ułomka składanego zamykają mnożniki równe,

s których powstaiają ułomki cząstkowe $\frac{A}{(1-pz)^2} + \frac{B}{1-pz} + \frac{C}{1-qz} + \frac{D}{1-rz}$ i t. d. ich wyrazy ogólne

razem dodane będą: $[(n+1)Ap^n + Bp^n + Cq^n + Dr^n + \text{i t. d.}]z^n = \bar{P}z^n$;
 $[(n+2)Ap^{n+1} + Bp^{n+1} + Cq^{n+1} + Dr^{n+1} + \text{i t. d.}]z^{n+1}$
 $= \bar{Q}z^{n+1}$; przypuściwszy nawet że p jest tak wielkie, iż q, r , i t. d. przed niem w znacznych potęgach uikną, zostanie się: $[(n+1)Ap^n + Bp^n] = \bar{P}$

$$[(n+2)Ap^{n+1} + Bp^{n+1}] = \bar{Q} \quad - \quad \frac{\bar{Q}}{p} = \frac{(n+2)A+B}{(n+1)A+B} p > p.$$

Widzemy więc, że posunawszy gdyby naydalej szereg liczb z zrównania powstaiający, nie trafiemy na wartość p , ale zawsze nam wypadnie pierwiastek większy od rzetelnego, chyba żeby n było liczbą niekończoną; to samo znajdziemy na liczbę większą pier-

piérwiastków równych: co nám dowodzi że użycie sposobu dopiero wyłożonego nie może nám się tak udać iak w piérwiastkach nierównych. Zeby więc podane zrównanie można bezpiecznie przez sposób Bernoullego traktować, trzeba nám się wprzód przekonać, czyli to nie zamyká w sobie piérwiastków równych. Iakże tego będziemy mogli dociec?

§. XXXIX.

Sposób ro-
zeznania pier-
wiastków ró-
wnych w zró-
wnaniu.

Piérwiastki równe należą do swęgo ogólnęgo wyrazu $(a+x)^m$, który nám wzór Newtona pokazuje. Szukámy w właśnościach tego wzoru przyzwoitey cechy, na rozeznanie takowych piérwiastków. Na tém koniec przypomniéć nám sobie potrzeba to, cośmy w piérwszey Części na końcu §. 12. o potęgach dostrzegli: że mając funkcją $M(a+x)^m$, i tę rozebraną na swoie terminy rozmnożywszy przez postęp Arytmetyczny $ok, k, 2k, 3k, 4k$, i t. d. zniżemy ją o jeden stopień; będzie bowiem mnogość równa $Mmkx(a+x)^{m-1}$. Aże zrównanie zamykając iakąkolwiek liczbę piérwiastków równych wyrazić możemy przez $(a+x)^m(a'+b'x+c'x^2+i \text{ t. d. })=0$, albo przez $(a+x)^m(b+x)^n(a'+b'x+c'x^2+i \text{ t. d. })=0$ rozebrawszy $(a+x)^m, (b+x)^n$ na swe terminy, i te rozmnożywszy nałámpieżd w wszystkie przez $a'+b'x+c'x^2+i \text{ t. d.}$ potem każdy z osobna przez podłożony sobie termin postępu Arytmetycznego $ok, k, 2k, 3k$, i t. d. obydwie potęgi zniżą się o jeden stopień, i zrównanie umniejszy się iednym s każdego gatunku piérwiastkiem równym. Jeżeli więc całe było rozdzielne przez $(a+x)^m(b+x)^n$, po tém rozmnożeniu będzie tylko rozdzielne przez $(a+x)^{m-1}(b+x)^{n-1}$. To atoli ostateńie przerobione zrównanie ma s piérwizem za spólnęgo mnożnika $(a+x)^{m-1}(b+x)^{n-1}$; s kąd wypadá takie prawidło: „że zniżywszy zrównanie iakiegokolwiek stopnia o jeden, jeżeli znaydziemy w niem spólnęgo mnożnika s podaném; zrównanie takowe będzie zamykało piérwiastki równe.,,

Teráz

Teraz mając podane sobie do rozwiązania zrównanie, potrzeba je naśmprzód dopełnić, jeżeliby których terminów brakowało, pisząc je w swym porządku z mnożnikiem zero; tak dopełnione rozmnożmy sposobem już wyłożonym przez postępowanie Arytmetyczny liczb, który lubo od upodobania zawisł, dla prostszego atoli działania obierzemy postępowanie 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. takim sposobem zrównanie zniży się o jeden stopień, które nazwiemy *przerobionem*: szukamy powtórę przez §. 21. mnożnika spólnego obydwom zrównaniom. S kąd wypadną następujące przypadki i wnioski do nich przywiązane:

Jeżeli ten mnożnik będzie pierwszego stopnia $(x-p)$; zrównanie podane, będzie miało dwa pierwiastki równe $(x-p)^2$

Jeżeli mnożnik spólny jest drugiego stopnia, rozebrać go potrzeba na dwa tego stopnia, które albo będą równe albo nierówne: w pierwszym przypadku zrównanie podane ma trzy pierwiastki równe, z których każdy wyraża się przez tego mnożnika przywiedzionego do zero: w drugim zaś przypadku zrównanie ma cztery pierwiastki równe; z których każde dwa są różnego gatunku i wyrażają się przez jednego z mnożników.

Zgoda jeżeli mnożnik spólny obydwóch zrównań jest stopnia n , rozebrać go należy na n mnożników pierwszego stopnia: te jeżeli będą wszystkie równe, zrównanie podane ma $n+1$ pierwiastków równych tego samego gatunku; jeżeli zaś będą wszystkie nierówne zrównanie ma $2n$ mnożników równych co do liczby, a zaś n co do gatunku; każdemu bowiem różnemu mnożnikowi odpowiada para pierwiastków tego samego gatunku. Jeżeli w liczbie n mnożników jedne będą równe, drugie nierówne, liczbę każdego gatunku powiększyć należy jednością; a zbiór ich pokazuje liczbę pierwiastków równych w zrównaniu podanem:

Przykład 1. Niech będzie zrównanie podane $x^4 -$

0

$3x^3 - 6x^2$

$3x^3 - 6x^2 + 28x + 24 = 0$, wynaleśdź czyli, i wiele má pierwiastków równych?

Rozmnożmy każdy iego termin przez podłożoną mu liczbę postępu Arytmetycznego 4, 3, 2, 1, 0: wypadnie s tąd zrównanie przerobione $4x^3 - 9x^2 + 12x + 24 = 0$, które má za mnożnika spólnie z zrównaniem podanem: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, co pokazuje, że zrównanie podane má trzy pierwiastki równe $(x - 2)$ $(x - 2)(x - 2) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$, przez to zrównanie 3go stopnia rozdzieliwszy podane, otrzymamy czwarty pierwiastek $x + 3 = 0$.

Przykład II. Mając zrównanie $x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 = 0$, wynaleśdź iego pierwiastki równe?

Wziąwszy postęp Arytmetyczny liczb 4, 3, 2, 1, 0, i przez każdy iego termin rozmaożywszy termin zrównania, niżemy ie o ieden stopień: $4x^3 - 30x^2 + 74x - 60 = 0$. Szukając największego mnożnika spólnego obydwóm zrównanióm, znajdziemy go $x^2 - 5x + 6$: ten mnożnik rozebrany na dwa pierwszego stopnia daie $x = 2$, $x = 3$, co pokazuje że zrównanie podane má dwa pierwiastki równe iednego gatunku $(x - 2)^2 = 0$, i dwa równe drugiego gatunku $(x - 3)^2 = 0$. Mnogość bowiem $(x - 2)^2(x - 3)^2 = 0$ wyda zrównanie podane.

Wynalazek więc pierwiastków równych zawiśł od sposobu rozbiierania zrównań na swe mnożniki, który iak iest niedokładny widzieliśmy w §. 21. Nie możemy więc przyśdź do rozeznania pierwiastków równych tylko w pewnych szczególnych przypadkach, które iednak pomóc nám wiele mogą w stólowaniu teoryi *Bernoullego*. Widzieliśmy bowiem, że ta nie może się udać chyba z znaczném oddaleniem się od prawdy, ieżeli zrównanie zamyká pierwiastki równe. Chcąc przeto naukę szeregów zwrotnych bezpiecznie i szczęśliwie stólować do wynalezienia pierwiastków bliskich, náleży nám wprzód się przekonać przez dopiero podany sposób, że zrównanie nie má pierwiastków równych, to iest: że zrównanie podane,

ne, i drugie niżone o ieden stopień, nie mają żadnego pierwiastku spólnego.

Przebiegliśmy już pierwiastki równe i nierówne ale zawsze rzetelne; zostaje nam jeszcze stółować szereg zwrotny do wynalezienia pierwiastków uroionych. Ponieważ każde zrównanie pokazuje się w wyrazach rzetelnych, szereg z niego powstający, a w tym szeregu wieloraz z rozdzielenia iednego terminu przez poprzedzający, nie może być tylko rzetelny. Idzie więc zatem że pierwiastków uroionych w zrównaniu nie możemy szukać za pomocą szeregów, tylko zamieniając te pierwiastki na rzetelne przez mnożenie ich po dwa na raz. Chcąc zaś szukać dwuistych takowych pierwiastków, potrzeba nam znówu szczególnego wyrazu któryby oznaczał mnożenie rzetelną, powstającą z dwóch pierwiastków uroionych: dla czego ten przypadek musimy niższym uwagom zachować.

ROZDZIAŁ DRUGI.

ZBIERANIE szeregów zwrotnych prowadzi nas do poznania UŁOMKÓW CIĄGLYCH, których się wykładają znakomitsze własności i użycie.

§. XL.

Pierwszy widok rzucony ogólnie na naturę i rodzaj szeregów, podał nam trzy zadania zawierające całą różległość téj nauki. Rozwiązaliśmy ich już dwa; bo nałaprzód wyłożyliśmy barzo ogólny sposób rozbiierania funkcyi ułomkowych iakichkolwiek na szeregi: sposób wydobyty z natury ilości nieoznaczonych, który jest iednym z najpiękniejszych wynalazków Des-Carta. Własności różne szeregów w tym rozbiorze dostrzeżone posłużyły nam do odkrycia stół-

Summowa-
nie szeregów
zwrotnych,
wiedząc zwi-
zek zachodzą-
cy między ter-
minami.

funktu między współ-czynnikami iakięgokolwiek terminu, i wykładnikiem ilości nieznaney w tymże terminie: co nam pokazuje układ każdego terminu w jednym wyrazie który nazwano *wyrazem ogólnym*. Zostaie nam ieżcze do wynalezienia sposób wracaiący nas od szeregu do funkcyi, która go wydała, a którą my nazwiemy *RODZĄCĄ* (*Functio, Fractio generatrix*). Ieżeliśmy dobrze obieiłi prawdy §. 32, uznamy że rozwiązanie zadania trzeciego iest náywážnieyszą cząstką nauki o szeregach. W niem zamierzamy sobie wynaleśdź każdego szeregu wyraz skóńczony, któryby tylé wartół, ile wszystkie terminy szeregu razem dodane, lub pewná ich liczbá. Spóśób tén nazwano *ZBIERANIEM* albo *SUMMOWANIEM SZEREGÓW* (*Summatio Serierum*).

Ponieważ dotąd ieden tylko gatunek szeregów przypadło nam rostrząsać, któreśmy zwrotnými nazwali; dla tego będziemy się tylko teraz zastanawiać nad zbieraniem szeregów do tego gatunku należących, to iest nad wynaydowaniem funkcyi ułomkowéy któraby była równą szeregowi podanemu. Nie możemy zaś wiedzieć że szereg podany iest zwrotny, nie będąc pewnemi, że w nim każdy termin iest funkcją poprzedzających; poznáwşy tę funkcją, wiedzieć razem będziemy stopnie stósfunktu, a zatém i mianownika ułomku. Nie idzie więc w takim przypadku tylko o wynalezienie licznika, który w samych tylko początkowych terminach szeregu iest zawarty. Iakże go odkryiemy? oto przez té same początki ilości nieoznaczonych, które nam dotąd służyły: mając przez stopnie stósfunktu danego mianownika, wprowadzemy w licznika ilości nieoznaczone a, b, c, d , i t. d. a rozebráwşy potém taki ułomek na szereg, przez porównanie terminów wypadną nam wartości na niewiadome a, b, c, d , i t. d. Dáymy n.p. że $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4 - - - +Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+Tz^{n+4}+ i t. d.$ iest szeregiem podanym: że związek dostrzeżony między terminami szeregu przyprowadził

nas do mianownika $1 - a'z + b'z^2 - c'z^3 + d'z^4$, będzie ułomek rodzący

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - a'z + b'z^2 - c'z^3 + d'z^4},$$

który rozebraliśmy na szereg i przywiódliśmy do zero, znajdziemy:

$$a = A - Ba' + Ab', \quad b = B - Aa', \quad c = C - Ba' + Bb' - c'A,$$

a przeto summa szeregu nazwaną (s) będzie

$$s = \frac{A + (B - Aa')z + (C - Ba' + Ab')z^2 + (D - Ca' + Bb' - Aa')z^3}{1 - a'z + b'z^2 - c'z^3 + d'z^4}$$

Chcąc zaś zbierać szereg do pewnego tylko terminu n.p. Pz^n , nazwaliśmy sumę terminów od początku aż do końca (s), sumę zaś terminów od Pz^n aż do końca nazwaliśmy (s'), będzie $s - s'$, sumą terminów od początku aż do Pz^n .

$$s' = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} + \text{i t. d.}$$

który rozdzieliwszy przez z^{n+1} , otrzymamy szereg takiego wzoru jak podany; a przeto

$$Qz^{n+1} + (R - Qa')z^{n+2} + (S - Ra' + Qb')z^{n+3} + (T - Sa' + Rb' - Qc')z^{n+4}$$

$$\frac{1 - a'z + b'z^2 - c'z^3 + d'z^4}{1 - a'z + b'z^2 - c'z^3 + d'z^4}$$

co odciągaliśmy od pierwszej summy, otrzymamy zbiór terminów aż do Pz^n . Jeżeli mianownik ułamku będzie wyższego lub niższego stopnia, sposób znalezienia licznika będzie ten sam.

Niech będzie n.p. szereg podany: $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + \dots + Pz^n + \text{i t. d.}$ w którym każdy termin jest sumą dwóch poprzedzających; mianownik zaś ułamku jest $1 - z - z^2$, gdzie $a' = 1, b' = -1, A = 1, B = 3$. Summa więc tego szeregu aż do Pz^n będzie:

$$s - s' = \frac{1 + 2z - Qz^{n+1} - (R - Qa')z^{n+2}}{1 - z - z^2} = \frac{1 + 2z - Qz^{n+1} - Pz^{n+2}}{1 - z - z^2}$$

gdyż $R - Qa' = -Pb'$. Aże według §. 37.

$$Q = \frac{P + \sqrt{(5P^2 + 20)}}{2},$$

włożywszy tę wartość za Q w sumę, i uczyniwszy $z = 1$, wypadnie summa liczb:

$$1+3+4+7+11+18 \dots +p = \frac{3p^2-6p+\sqrt{(3p^2+20)}}{2}$$

można więc wyrazić sumę do pewnego iakięgo terminu, przez funkcyę terminu ostatniego.

§. XLII.

Nie wiedząc
związku między
terminami szeregu,
spółob wyzna-
czenia go, i
rozeznania szere-
gów zwrotnych od in-
nych.

Wziąwszy na uwagę sposób zbierania szeregów dopiero wyłożony, znajdziemy że ten potrzebuje w nas wiadomości o gatunku szeregu, i o związku zachodzącym między jego terminami: obrani choć z jednej takowej wiadomości nie możemy być w stanie na znaczenia mianownika ułamku, a zatem ani summy szeregu. Gdybyśmy zadanie o zbieraniu szeregów mogli nie zawisłe od tych wiadomości rozwiązać, niezmierniebyśmy rozleglejszy dostąpili o szeregach nauki. Usiłujemy więc do takiego zamiaru rozwiązać zadanie następujące: „Mając podany sobie iaki, „kolewkie szereg, doysdź sposobu rozeznania czyli „ten jest zwrotny lub nie; a będąc takim, wynależdź „jego ułamek rodzący! „ Nim przystąpimy do rozwiązania tego zadania zgódźmy się nazywać szeregi te, które powstaia z ułamków mianownika 1go, 2go, 3go, 4go, mgo stopnia; Szeregami 1go, 2go, 3go, 4go, mgo Porządku, iakieśmy już pod §. 33 uczynili, mówiąc o szeregach Algebraicznych. Zeby się dowiedzieć, czyli szereg podany iakikolewkie jest zwrotny lub nie; potrzebaby doysdź, czyli on powstał z ułamku wymiernego, w którym licznik jest niższej potęgi od mianownika, a przeto potrzebaby nam znaledź sposob. przerobienia szeregu na ułamek.

Szereg zwrotny rodzi się z ułamku przez ciągłe dzielenie, s którego nowy wieloraz daie nowy termin szeregu; potrzebaby nam więc w tém samem działaniu szukać sposobu wrócenia się od tych ciągłych wielorazów do samey funkcyi dzielącey i podzielnéy. Niech będzie $A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{i t. d.} = s$ szeregiem zwrotnym pierwszego porządku, będzie jego ułamek rodzący pierwszego stopnia, czyli $s = \frac{a}{a'+b'z}$;
więc

wiec $\frac{1}{s} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{a} z = p + qz$, kładąc p za $\frac{a'}{a}$; q za $\frac{b'}{a}$;

a przeto wieloraz tego dzielenia będzie funkcją skończoną: skąd wypada, że rozdzielwszy jedność przez szereg podany, jeżeli s tego dzielenia otrzymamy wieloraz wzoru $p + qz$, bez żadnej reszty; szereg nasz będzie szeregiem zwrotnym Pierwszego porządku, a jedność rozdzieloną przez ten wieloraz będzie ułomkiem rodzącym i razem sumą szeregu.

Jeżeli szereg podany jest drugiego porządku, należy on do ułomku drugiego stopnia $\frac{a+bz}{a'+b'z+c'z^2} = s$,

będzie więc $\frac{1}{s} = \frac{a'+b'z+c'z^2}{a+bz}$ a wykonawszy to

dzielenie i nazwawszy współczynnika reszty $\frac{bb'}{a} + c'$, (a''); otrzymamy $\frac{1}{s} = p + qz + \frac{a''z^2}{a+bz}$. Uwaga

żając to dzielenie w szeregu nieskończonym s , wi-
dziemy że przezeń rozdzieloną jedność wyda za wieloraz $p + qz$, i oprócz tego zostanie się reszta rozdziel-
na przez z^2 : ta reszta będzie szeregiem znowu nie-
skończonym, którego s jest dzielnikiem. Nazwiemy
ten szereg pozostały (s') wyrażając go przez $T + T'z$
 $+ T''z^2 + T'''z^3 + \dots$ i t. d. Będzie więc równając wielo-
raz z ułomku skończonego z wielorazem szeregu wym:

$$\frac{1}{s} = p + qz + \frac{s'z^2}{s} = p + qz + \frac{a''z^2}{a+bz}; \text{ więc } \frac{s'}{s} = \frac{a''}{a+bz}$$

a przeto $\frac{s'}{s} = \frac{a''}{a} + \frac{b''}{a} z = p' + q'z$; co nas uczy, że

rozdzielwszy jedność przez szereg nieskończony s , i
otzymawszy $p + qz$, z resztą s' , która jest także sze-
regiem nieskończonym, jeżeli przez tę resztę s' dzie-
ląc powtórnie szereg podany s , przyjdziemy do wielo-
razu skończonego bez żadnej reszty; szereg takowy
będzie szeregiem zwrotnym drugiego Porządku, któ-
rego

$$\text{régo ułomek} = \frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2} = \frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2} = \frac{1}{p+qz+\frac{s'}{s}z^2} = s.$$

Jeżeli szereg jest 3go porządku, ułomek go rodzący ma mieć mianownika 3go stopnia, będzie więc:

$$s = \frac{a+bz+cz^2}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}, \quad \frac{1}{s} = \frac{a'+b'z+c'z^2+d'z^3}{a+bz+cz^2},$$

wykonawszy to działanie otrzymamy za ilość skończoną $p+qz$, i resztę pozostałą $\frac{a''z^2+b''z^3}{a+bz+cz^2}$, przez p ,

q , a'' , b'' , znacząc współczynniki z , które s tego dzielenia wypadną. A ponieważ to działanie które tu

odbywamy z ułamkiem, odbywać należy szeregami nieskończonym; reszta s tego dzielenia będzie szereg nieskończony s' rozdzielnym przez z^2 , i mający za dziel-

nika s ; wieloraz więc szereg wyrazi się przez $\frac{1}{s}$

$$= p+qz+\frac{s'z^2}{s} = p+qz+\frac{a''z^2+b''z^3}{a+bz+cz^2}; \text{ przeto } \frac{1}{s} =$$

$$\frac{a''+b''z}{a+bz+cz^2}. \text{ To ostatnie równanie pokazuje ten sam}$$

przypadek któryśmy w szeregach 2go porządku uważali, gdyż $\frac{s}{s'} = \frac{a+bz+cz^2}{a''+b''z}$. Tu wykonane znowu

dzielenie wyda wieloraz $p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z}$; gdzie re-

szta pozostała będzie, szereg nieskończony s'' , rozdzielnym przez z^2 , i mający za dzielnika s' tak dalece że:

$$\frac{s}{s'} = p'+q'z+\frac{a'''z^2}{a''+b''z} = p'+q'z+\frac{s''z^2}{s'}; \text{ a przeto}$$

$$\frac{a'''}{a''+b''z} = \frac{s''}{s'}; \quad \frac{s'}{s''} = \frac{a''+b''z}{a'''} = p''+q''z. \text{ co nas zno-}$$

wu uczy: że mając szereg podany, i przezeń rozdzieliwszy jedność, otrzymamy nasamprzód wieloraz

$$p+qz,$$

$p+qz$, a za resztę szereg nieskończony s' , przez tę resztę dzieląc znowu szereg s , otrzymamy wieloraz $p'+q'z$, a za resztę szereg nieskończony który wyrażam przez s'' ; przez tę ostatnią resztę, dzieląc resztę poprzedzającą s' , jeżeli trafię na wieloraz zupełny bez reszty, szereg podany s będzie szeregiem zwrotnym trzeciego porządku. A ponieważ

$$\frac{s}{p+qz} = \frac{s'}{p'+q'z} = \frac{s''}{p''+q''z}$$

$$\text{będzie } s = \frac{1}{p+qz+z^2} \cdot \frac{p'+q'z+z^2}{p''+q''z}$$

co przerobiwszy na ułamek pospolity, otrzymamy sumę szeregu podanego, czyli ułamek rodzący szereg podany.

S trzech tych szczególnych przykładów mamy już prawo wnieść sposób ogólny na rozeznanie szeregów zwrotnych, i na wynalezienie ułomków rodzących: ten sposób z działań poprzedzających wyciągniony i rozwiązujący zadanie, zamyka się w takowem prawie: „Mając sobie podany szereg, dziel przez niego jedność, poki nie otrzymałz za wieloraz dwóch terminów wzoru $p+qz$; jeżeli się została reszta s' , dziel przez nią szereg podany s , poki nie wypadną na wieloraz dwa terminy $p'+q'z$; jeżeli z drugiego tego dzielenia została reszta s'' , dziel przez nią resztę poprzedzającą s' , poki za wieloraz nieotrzymałz dwóch terminów wzoru $p''+q''z$; jeżeli jeszcze zostanie się reszta s''' , dziel przez nią resztę poprzedzającą s'' ; a tak ciągnąć dalej dzielenie reszty poprzedzającej, przez resztę pozostałą z ostatniego dzielenia, przyidziesz koniecznie do wielokrotności zupełnego bez żadnej reszty; jeżeli szereg jest zwrotny; tak dalece, że liczba dzielenia będzie równa liczbie porządku do którego szereg należy; i

Og.

„ jeżeli

„jeżeli szereg jest *n*-go porządku, dzielenie skończy się na *n*-tym działaniu. Jeżeli zaś dzielenie takim, sposobem odbywane nie przyprowadzi cię do wie-
 „łorażu zupełnego; szereg podany nie jest szeregiem
 „zwrótnym.”

Objasniemy to w przykładach:

Mając podany szereg liczb 1, 2, 3, 3, 7, 5, 15, 9, 31, 17, 63, 33, 127, 65, i t. d. którego prawo całe nam nieznane, wynaleśdź czyli jest zwrótnym lub nie? i jeżeli jest takim, odkryć jego ułomek rodzący?

Podane liczby układam podług wzoru szeregów z ilością nieznaną, to jest: $1 + 2z + 3z^2 + 3z^3 + 7z^4 + 5z^5 + 15z^6 + 9z^7 + 31z^8 + 17z^9 + 63z^{10} + 33z^{11} + 127z^{12} +$ i t. d.

(1); rozdzieliwszy przezeń jedność, otrzymam $\frac{1}{s} =$

$1 - 2z$; za resztę zaś szereg $z^2 + 3z^3 - z^4 + 9z^5 - 5z^6$ i t. d. który rozdzieliwszy przez z^2 , wypadnie

(s') $1 + 3z - z^2 + 9z^3 - 5z^4 + 21z^5 - 13z^6 + 45z^7 - 29z^8 + 93z^9 -$ i t. d. przez ten szereg dzieląc szereg

podany, będzie $\frac{s}{s'} = 1 - z$, reszta pozostała: $7z^2 -$

$7z^3 + 21z^4 - 21z^5$ i t. d. którą rozdzieliwszy przez z^2 , zostanie się szereg

(s'') $7 - 7z + 21z^2 - 21z^3 + 49z^4 - 49z^5 +$ i t. d.

Przez tę resztę dzieląc resztę poprzedzającą s', otrzy-

mam za wieloraz zupełny $\frac{s'}{s''} = \frac{1+4z}{7}$ bez żadnej

reszty, co mi pokazuje, że szereg podany s, jest szeregiem zwrótnym 3-go porządku, którego ułomek

$$= \frac{1}{1 - 2z + z^2}$$

$$\frac{1 - z + 7z^2}{1 + 4z} \quad (a)$$

$$1 + 4z$$

to jest: $\frac{1 + 3z + 3z^2}{1 - z - 2z^2 - 2z^3}$ iako się pokáže niżej.

Dofirze

Dostrzeżliśmy w teraźniejszym działaniu, że każdy zостаający szereg, który ma służyć za dzielnik, jest rozdzielnym przez z^2 , co koniecznie wypada z natury działania. Przytrafić się atoli może, że szereg takowy będzie zamykał w pierwszym zaraz terminie potęgę wyższą nad z^2 , i na ten czas żeby nie wprowadzić wykładników odjemnych w wieloraz, można cały szereg przez tę potęgę rozdzielić, która się w pierwszym terminie pokaze, byleby takową potęgę położyć za z^2 w liczniku $\frac{1}{s'}$, $\frac{1}{s''}$ i t. d. n. p.

Niech będzie podany szereg liczb: 1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, i t. d. układam z niego szereg potęg:

$1+z+z^2+2z^3+4z^4+6z^5+7z^6+7z^7+7z^8+8z^9+$ i t. d. (s):
dzieląc przezeń jedność, otrzymam za wieloraz

$\frac{1}{s} = 1-z$, a za resztę $-z^3-2z^4-2z^5-z^6-z^9-2z^{10}$ i t. d. to jest:

(s') $1+2z+2z^2-z^3-z^6+2z^7+2z^8+z^9-z^{12}$
i t. d. przez co dzieląc znowu szereg podany s, otrzymam za wieloraz $\frac{s}{s'} = 1-z$; za resztę zaś z^2+3z^3

$+5z^4+6z^5+$ i t. d. $=s''z^2$, zaczęin:

(s'') $1+3z+5z^2+6z^3+6z^4+6z^5+7z^6+9z^7+11z^8+$ i t. d. przez tę znowu resztę dzieląc resztę poprzedzającą s', wypadnie $\frac{s'}{s''} = 1-z$, bez żadnej reszty,

co nam dowodzi, że szereg podany jest zwrotnym, którego ułamek wyraża się przez

$$\frac{1}{1-z-z^2} \quad (b).$$

$1-z$ ten przywiódłszy do ułamku pospolitego,

litęgo, znajdziemy $\frac{1-2z+2z^2}{1-3z+4z^2-3z^3+2z^4}$; przeto

szereg podany jest czwartego porządku, lubo trzy tylko zachodziły działania: co żebyśmy dokładniej oznaczyli, niech n znaczy liczbę działań; p, q, r , i t. d. potęgi z w licznikach ułomków, czyli potęgi przez które dzielą się reszty s', s'', s''' , i t. d. będzie szereg takowy, którego reszty nie są statecznie rozdzielne przez z^2 , ale przez potęgi p, q, r , i t. d.; będzie mowię takowy szereg porządku $n+(p-2)+(q-2)+(r-2)+1$ i t. d. o czém nas przykłady łatwo przekonają.

§. XLII.

Opisanie ułomków ciągłych.

Sposób rozeznawania szeregów zwrotnych zależący na ciągłym dzieleniu jednej reszty przez drugą, odkrył nam nowy rodzaj ułomków iakimi były (a) , (b) , gdzie każdy mianownik zamyka ilość całą złączoną z ilością łamaną. Takowe ułomki nazwano CIĄGŁEMI (*Fractions continues*). Przez nie wyrażają się zbiory czyli summy szeregów zwrotnych, tak dalece, że im szereg iaki jest wyższego porządku, tém się jego summa w dłuższym ułomku ciągłym zawiera; i ten ułomek ciągnie się bez końca, jeżeli szereg nie należy do klasy szeregów zwrotnych. Nie możemy więc summy szeregów zwrotnych w ułomku pospolitym wyrazić, nie umiawszy sposobu przerabiania ułomków ciągłych na pospolite. Sposób zaś ten lubo jest barzo prosty, jednakowóż dla gruntownego poznania nowego tego rachunku, godną jest rzecz naszej uwagi wnieść w ściślejsze rostrząśnienie jego natury i własności, które nam tu z porządku barzo związkowego przypada. Obrocemy więc uwagę naszą naprzód na poznanie rozleglejsze natury ułomków ciągłych: powtóre na sposób przerabiania ich na ułomki pospolite; potrzebie na wypadki stąd wynikające i objaśniające nas o własnościach ułomków ciągłych.

Co

Co do pierwszego trafiliśmy na ułamki ciągłe, dzieląc reszty zostające jedné przez drugie; czyli chcąc to ogólnie wyrazić, szukając nąbliższych wartości całkich, tych funkcji, których nie możemy wyrazić zupełnie. Zebysmy więc rozległéj objęli znaczenie i początek ułamków ciągłych, wytawmy sobie funkcję α , której nie możemy w wyrazie całkim zawrzeć, ale do tego wyrazu możemy się co raz bar-
 zięy zbliżać. Te bliższe wartości znaczyć będziemy literami łacińskimi a, b, c, d, e , i t. d. ich zaś reszty pozostałe zupełnie wyrażać będą litery greckie $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, i t. d. Jeżeli α jest funkcją ułamkową, szu-
 kamy wartości całkiej, którą ją nąbliżey wyraża, i nazwiemy ją A zostanie się więc s tego dzielenia reszta $(\alpha - a) < 1$, chcąc znówu téj reszty mieć ną-
 bliższą wartość całką, muszę ją przerobić na wyraż większy od jedności. Jeżeli $(\alpha - a) < 1$, będzie

$$\frac{1}{\alpha - a} > 1 = \beta, \quad \alpha = a + \frac{1}{\beta},$$

ponieważ β jest większe od jedności, szukam nąbliższego iey całkiego wyra-
 zu, który nazywam b ; s tego podziału zostanie się
 znówu reszta $(\beta - b) < 1$, więc $\frac{1}{\beta - b} = \gamma > 1$, a

przeto $\beta = b + \frac{1}{\gamma}$; szukam znówu wartości całkiej
 nąbliższej γ , i nazywam ją c ; s tego dzielenia zo-
 stanie się reszta $(\gamma - c) < 1$, więc $\frac{1}{\gamma - c} = \delta > 1$, a

przeto $\gamma = c + \frac{1}{\delta}$; ponieważ reszta $\delta > 1$, szukam
 nąbliższej mu wartości całkiej, którą nazywam d ;
 zostanie się reszta $(\delta - d) < 1$, a zatem $\frac{1}{\delta - d} = \epsilon > 1$,
 " $\delta = d +$

$d_k = d + \frac{1}{e}$; ciągnąć tak dalej to dochodzenie, muszę

koniecznie wyczerpać a , bo muszę koniecznie przyiść do náyprościęjszego wyrazu, którego już daley dzie-
lić niepodobną, chyba że a nie jest funkcją algebrai-
czną, albo że jest funkcją algebraiczną niewymierną;
i na ten czas działanie moje pociągnie się bez końca.
Zbierzmyż teraz te wszystkie zbliżenia wypadki.

$$a = a + \frac{1}{\beta}, \beta = b + \frac{1}{\gamma}, \gamma = c + \frac{1}{d_k}, d_k = d + \frac{1}{e}, \text{ i t. d.}$$

$$a = a + \frac{1}{b + \frac{1}{\gamma}}, \text{ czyli } a = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d_k}}}$$

$$a = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d_k + \frac{1}{e}}}}, \text{ i t. d.}$$

i t. d.

ich własność
co do znaków

Ponieważ według naszego przypuszczenia a, b, c, d, e , i t. d. są ilościami całkiem náybliższymi ilo-
ści a, β, γ, d_k, e , i t. d. ilości zaś náybliższe są albo te,
które tuż poprzedzają wartość prawdziwą, i są od
niej mnieysze; albo te które tuż idą po wartości pr-
awdziwey i są od niej więkzse; jeżeli a, b, c, d , i t. d.
są tuż poprzedzającymi i mnieyszemi od wartości pr-
awdziwych a, β, γ, d_k , i t. d. reszty pozostałe $a - a$,
 $\beta - b$, $\gamma - c$ są dodatne. Jeżeli zaś wartości bliskie
 a, b, c, d , i t. d. są więkzse od prawdziwych n. p. $a > a$

reszta $a - a$, a zatem $\frac{1}{a - a} = \beta$ jest odjemną; jeżeli

β jest odjemne; b musi być takim; gdyż jest tego
samego rodzaju ilością náybliższą β ; b będąc odie-
mne, jeżeli jest znowu ilością więkzszą od β ; $\beta - b = \frac{1}{\gamma}$.

będzie

będzie ilością dodatną, więc i c być musi dodatnie: c będąc dodatnie a razem najbliższe γ , jeżeli $c > \gamma$, będzie $\gamma - c = \frac{1}{n}$ ilością ujemną, więc n będzie ujemne, a zatem i d jego wartość całkową najbliższą: n , będąc ujemne, jeżeli $d > n$ będzie $n - d = \frac{1}{e}$ ilo-

ścią dodatnią, zaczem e będzie dodatnie; s kąd się pokazuje, że jeżeli za najbliższe całkowite wartości brać będziemy ilości mniejsze od prawdziwych; ułomek ciągły s tąd powstający cały będzie dodatny; jeżeli zaś za najbliższe wartości brać będziemy ilości większe od prawdziwych; ułomek ciągły będzie miał w swych terminach znaki dodatnie z ujemnymi na przemian. Tymże samym sposobem rozumując znajdziem, że jeżeli jedną ilość najbliższą weźmiemy większą od prawdziwej, inne zaś po niej następne weźmiem mniejsze; wszystkie terminy ułamku ciągłego po tej większej bliższej wartości idące będą ujemne. Chcąc te wszystkie rozumowania łatwiej widzieć w przykładzie, przypuścimy, że a jest ułom-

kiem pospolitym $\frac{A}{B}$, przypuścimy i to że $A > B$ lu-

bo to przypuszczenie nie jest konieczne: dzieląc A przez B , otrzymamy za wieloraz a , za resztę C ,

zaczem $\frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$, gdzie $C < B$ więc $\frac{B}{C} > 1$: dzielę

znowu B przez C , i otrzymam za wieloraz całkową b ,

za resztę zaś D ; przeto $\frac{B}{C} = b + \frac{D}{C}$, gdzie $D < C$, a

zatem $\frac{C}{D} > 1$, którey szukając znowu bliższej warto-

ści całkowej c , a resztę przewracając, przerobię ją na ilość złożoną z całkowej i ułamkowej: takim sposobem ciągnąc

gólności, prawideł, weźmiemy jeden ułamek, ciągły
mający wszędzie za licznika jedność, drugi mający
ilość jakąkolwiek.

$$a = a + 1$$

$$\frac{b+1}{c+1}$$

$$\frac{d+1}{e+1}$$

$$\frac{f+1}{g+1}$$

e + i t. d.

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{1}$$

$$\frac{a+1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{abc+c+a}{bc+1}$$

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b}$$

$$\frac{a+1}{b+1} = \frac{abcde+cde+ade+ahe+e+abc+c+a}{bcde+de+be+bc+1}$$

$$a = a + a'$$

$$\frac{b+b'}{c+c'}$$

$$\frac{d+d'}$$

$$\frac{e+e'}$$

e + i t. d.

P

$$\frac{a}{1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{1} &= \frac{a}{1} \\
 a + \frac{a'}{b} &= \frac{ab+a'}{b} \\
 \frac{a+a'}{\frac{b+b'}{c}} &= \frac{abc+ca'+b'a}{bc+b'} \\
 \frac{a+a'}{\frac{b+b'}{c+d}} &= \frac{abcd+eda'+adb'+abc'+a'e'}{bcd+db'+bc'}
 \end{aligned}$$

i t. d.

Zastanowiemy się najprzód nad ułamkiem ciągłym mającym wszędzie jedność za licznika, dla tego że ten gatunek jest najczęstszy w używaniu; powtóre że uwagi nad nim mogą być podobnym sposobem rościągione do drugiego. Znosząc s sobą te ułamki pośpolite, dostrzeżemy w ich rodzaju, że każdy licznik ułamku pośpolitego jest funkcją dwóch liczników poprzedzających, i każdy mianownik funkcją także dwóch mianowników poprzedzających, to jest, rozmnożywszy pierwszego poprzedzającego licznika przez nową literę w ułamku ciągłym, i do téj mnogości dodawszy poprzedzającego licznika, wypadnie licznik nowego pośpolitego ułamku; to samo prawo ma miejsce w mianowniku każdym, tak dalece, że wystawiwszy sobie przez A, B, C, D, E, F , i t. d. szeregi liczników powstających z ułamków ciągłych co raz dłuższych; mianowników zaś tychże pośpolitych ułamków przez A', B', C', D', E' i t. d. znajdziemy między niemi taki związek:

$$\begin{aligned}
 (k) \quad A &= a & A' &= 1 \\
 B &= bA + 1 & B' &= b \\
 C &= cB + A & C' &= cB' + A' \\
 D &= dC + B & D' &= dC' + B' \\
 E &= eD + C & E' &= eD' + C' \\
 & \text{i t. d.} & & \text{i t. d.} \quad a, b,
 \end{aligned} \tag{l}$$

a, b, c, d, e , i t. d. będąc ilościami konieczniew całkiem, mogą być dodatnie lub odjemne, a dla nich niektóre terminy w równaniach poprzedzających będą takie. Jeżeli natomiast wszystkie będą dodatnie, dzieląc je przez się, wypadnie:

na liczniki,	na mianowniki,
$\frac{B}{A} = b + \frac{1}{A}$	$\frac{B'}{A'} = b$
$\frac{C}{B} = c + \frac{A}{B}$	$\frac{C'}{B'} = c + \frac{A'}{B'}$
(m) $\frac{D}{C} = d + \frac{B}{C}$	$\frac{D'}{C'} = d + \frac{B'}{C'}$ (n)
$\frac{E}{D} = e + \frac{C}{D}$	$\frac{E'}{D'} = e + \frac{C'}{D'}$
i t. d.	i t. d.

przypuściwszy nawet że a, b, c, d, e , i t. d. nie są większemi od jedności; równania teraznijsze pokazują, że każdy z ułamków $\frac{B}{A}, \frac{C}{B}, \frac{D}{C}$, i t. d. iako też

$\frac{B'}{A'}, \frac{C'}{B'}, \frac{D'}{C'}$, i t. d. jest większym od jedności; zaczęm

musi być $B > A, C > B, D > C, E > D$, i t. d. podobnież $B' > A', C' > B', D' > C', E' > D'$, i t. d. to jest że mianowniki równie jak liczniki postępując co raz barzięj rosną. Jeżeli zaś a, b, c, d, e , i t. d. będą wszystkie albo niektóre równe jedności, oprócz tego niektóre terminy w równaniach odjemne, n. p.

$c = \pm 1$, jeżeli $\frac{A}{B}$ nie będzie tego samego znaku z c ,

będzie $\frac{C}{B} < 1$, a przeto $B > C$, na ten czas wzrośt li-

czników i mianowników będzie przerwany. Uważmy czyli w tym przypadku inne terminy następujące będą rosły lub nie? Na ten koniec wróćmy się do

P₂

dawniey.

dawniejszych równań: ponieważ $\gamma = c + \frac{1}{\delta}$, $c \neq 1$,

będzie $\gamma = 1 + \frac{1}{\delta}$, aże γ, δ , są koniecznie większe

mi od jedności, γ musi mieć jeden znak z δ , więc c, d , iako najbliższe wartości γ, δ , muszą mieć z niemi iedne znaki; będą przeto γ, δ, c, d , koniecznie tych-

że samych znaków. Powtóre $\frac{C}{B} = c + \frac{A}{B}$, gdzie $\frac{A}{B}$

różni się znakiem od c ; ale że $\frac{A}{B} < 1$, będzie $c > \frac{A}{B}$,

więc $\frac{C}{B}$ będzie tego samego znaku co i c , będą więc

koniecznie $\gamma, \delta, c, d, \frac{C}{B}$, tychże samych znaków, a

przeto mnogość $\frac{dC}{B}$ będzie koniecznie ilością doda-

tną; a ponieważ $\frac{D}{C} = d + \frac{B}{C}$, rozmnożywszy całe to

równanie przez $\frac{C}{B}$, wypadnie $\frac{D}{B} = \frac{dC}{B} + 1$; przeto

$\frac{D}{B} > 1$, a zatem $D > B$, co nam oczywiście dowodzi,

że chociaż w postępie terminów A, B, C, D , i t.d. iako też A', B', C', D' , i t.d. który stanie się mniejszym od poprzedzającego, drugi po nim idący znowu zacznie wzrastać; wnieśmy więc, że szereg liczników i mianowników w ułamkach połączonych idzie wzrastać, i że to prawo wzrostu przerwane w którym terminie, wróci się znowu w terminach następujących.

§. XLIV.

Rozstrząsnąwszy z osobna liczników i mianowników, złożmy je teraz razem na ułamki poospolite, s których każdy wyraża wartość ułamku ciągłego odpowiadającego mu. Te ułamki poospolite pociągną się rzędem:

Z ułamków poospolitych wyciąga się właściwości ułamków ciągłych.

(p) $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \frac{F}{F'}$ i t. d. tak dalece że im dalszy będzie takowy ułamek, tém się barziéy zbliży do wartości prawdziwéy owéy funkcyi, którąśmy na ułamek ciągły rozebrali; i ostatni taki $\frac{V}{V'}$ będzie ró-

wny ze wszytkiém funkcyi wspomnionéy. Co właśnie z natury rzeczy wypływa; bo jeżeli ułamek ciągły tém lepiéy wyraża swą rodzającą funkcyą, im się daley rościaga, a skończywszy się, jest iéy zupełnie równy; tak ułamki poospolite $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}$ i t. d. wyrażające

tém dłuższy ułamek ciągły im są dalsze, barziéy się do funkcyi rodzącéy zbliżają, im są odlegléysze; ażé ostatni z nich ogarnia cały ułamek ciągły, ogarnia także całą funkcyą taki ułamek rodzącą.

Biorąc po dwa przyległe ułamki z rzędu (p) i dzieląc ieden przez drugi, wypadną zachodzące między niemi stófunki: $\frac{BA'}{AB'}, \frac{B'C}{BC'}, \frac{C'D}{CD'}, \frac{D'E}{DE'}$ i t. d.

których wartość wyciągnioną z równań (m), (n),

§. 43, to jest: $\frac{A'}{B'} \times \frac{B}{A} = \frac{A'}{B'} \left(b + \frac{1}{A} \right) = \frac{A'}{B'A} + 1$, kła-

dąc za b wartość z (n); zaczęm $A'B - AB' = 1$, podobnie w innych $\frac{B'C}{BC'}, \frac{C'D}{CD'}$ i t. d. kładąc za $\frac{C}{B}, \frac{D}{C}$,

$\frac{E}{D}$, wartość z (m); zaś za b, c, d, e , i t. d. wartość z (n); przydziemy do następujących równań.

P_3

BA'

$$\begin{aligned}
 (q) \quad & BA' - AB' = 1, \\
 & CB' - BC' = -1, \\
 & DC' - CD' = 1, \\
 & ED' - DE' = -1, \\
 & \text{i t. d.}
 \end{aligned}$$

Zrównania te uczą nas, że ułamki (p) są przywiezione do najprościęjszego wyrazu; gdyby bowiem miały takich mnożników wspólnych licznikowi i mianownikowi; te pokazałyby się były w zrównaniach (q) wypadających z ich stosunku. Te zrównania (q) wydadzą s siebie inne:

$$\begin{aligned}
 (r) \quad & \frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'} \\
 & \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'C'} \\
 & \frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{1}{D'C'} \\
 & \frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = -\frac{1}{E'D'} \\
 & \text{i t. d.}
 \end{aligned}$$

które stawiają nam przed oczy następujące prawdy: Naprzód z §. 4; wiemy, że A', B', C', D', E' , i t. d. postępując rosną; więc i mnożności $A'B', B'C', D'C'$, i t. d. a zatem różnice między ułomkami przyległymi (p) tém barziej maleją, im te ułamki są odleglejsze: ułamki więc rzędu (p) przystępują co raz barziej do prawdziwych i ścisłych wartości. Powtóre to przystępowanie tak jest bliskie, iż nad nie nie można naznaczyć bliższego w tak prostym wyrazie; ponieważ między dwoma takimi ułomkami żaden inny nie może szkodkować, chyba z mianownikiem większym od którego s tuż przyległych. Pozwólmy bowiem że między ułomkami przyległymi $\frac{C}{C'}, \frac{D}{D'}$

szodkuje inny $\frac{m}{n}$ z mianownikiem n mniejszym od C' ,

C' , albo D' , ich więc różnica $\frac{nC - mC'}{nC'}$ bydzby po-
 winna mniejszą od $\frac{1}{D'C'}$; pierwsza nie może być
 mniejszą od $\frac{1}{nC'}$; więc jeżeli $n < D'$, $\frac{1}{nC'} > \frac{1}{C'D'}$, za-
 czem ułomek $\frac{m}{n}$ nie tak się zbliża do wartości prą-

wdziwéj iak którykolwiek z rzędu (p) . Gdyby zaś
 środkujący ułomek był z mianownikiem większym
 od D' albo C' , iego wartość barziejby się oddalała
 od wartości prawdziwéj niżeli wartość którégokol-
 wiek z ułomków (p) ; różnica bowiem między
 $\frac{C}{C'} - \frac{m}{n}$ byłaby większą od różnicy $\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'}$; a prze-
 to między dwoma przyległemi ułomkami różnica
 znajduje się najmniejszą, którykolwiek z takowych
 ułomków wyraża wartość tak bliską prawdziwéj,
 iż żaden inny ułomek wyrazić iey bliżéj nie może,
 chybaby w wyrazie zawikłéjszym.

Uwážmy teraz iak daleko idzie to zbliżenie. Po-
 niéwáž $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$, i t. d. oznaczają prawdziwé po-
 zostatę reszty; zaś a, b, c, d, e , i t. d. reszty bliskie
 tamtych, używając zrównań, (k) , (l) , będą wartościami
 prawdziwé na α .

$$\begin{aligned}
 \alpha &= A + \frac{1}{\beta} = \frac{A\beta + 1}{\beta} = \frac{A}{A'\beta} + \frac{1}{A'\beta}; \\
 (s) \quad \alpha &= \frac{P\gamma + A}{B'\gamma + A'} = \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'(B'\gamma + A')}; \\
 \alpha &= \frac{C\delta + B}{C'\delta + B'} = \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'[C'\delta + B']}; \\
 \alpha &= \frac{D\epsilon + C}{D'\epsilon + C'} = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'(D'\epsilon + C')}; \\
 &\quad \text{i t. d.} \quad P_4 \quad \epsilon
 \end{aligned}$$

te wartości, prawdziwie pokazują nam zaraz różnice od wartości bliskich zamkniętych w ułamkach (p), s którychto różnic sądzić możemy iak daleko oddaliśmy się od prawdy, biorąc $\frac{C}{C'}$ na miéysce wartości prawdziwéy. Błąd nasz wytknięty iest w ułamku

$$\frac{1}{C'(C'\mathcal{A}+B')}$$

wyrażającym różnicę między $\frac{C}{C'}$ i $\frac{C\mathcal{A}+B}{C'\mathcal{A}+B'}$;

chcąc ten błąd ocenić, uważmy że \mathcal{A} ma za wartość bliską d ; od której różni się ułamkiem mnieyszym od iedności, wartości więc \mathcal{A} zawarte są między d i $d\pm 1$, znak wyższy należy się kiedy $d < \mathcal{A}$; niższy zaś kiedy $d > \mathcal{A}$ więc i mianownik różnicy zawarty iest między $C'd+B'$, i $C'(d\pm 1)+B'$ czyli między D' i $D'\pm C'$, to iest: przypuściwszy że $\mathcal{A} > d$, a biorąc za wartość $\alpha = \frac{C}{C'}$; popełniamy błąd mniejszy od $\frac{1}{D'C'}$

ale większy od $\frac{1}{D'(D'+C')}$, tymże samym sposobem uważając wartości β, γ, ϵ i t. d. zamknięte między granicami $b, b+1$; $c, c+1$; $e, e+1$; przez podobne rozumowania znajdziem, że biorąc za α ułamki

$$\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{D}{D'}, \frac{E}{E'}, \text{ i t. d. } \text{ popełniamy błąd mniejszy od}$$

$$\frac{1}{A'B'}, \frac{1}{B'C'}, \frac{1}{D'E'} \text{ i t. d. ale większy od } \frac{1}{A'(B'+A')};$$

$$\frac{1}{B'(C'+B')} \text{ i t. d. s kąd się pokazuje naprzód iak}$$

błąd nasz iest mały, i iak ten zmniejsza się co raz barziéy biorąc odlegléysze ułamki z rzędu (p).

Potrzecié zapatrzywszy się na zrównania (r), widzemy że różnice brane między dwoma przyległemi ułamkami rzędu (p) są na przemian dodatne i odjemne;

mnę, różnice znowu między wartościami prawdziwymi i bliższymi zamknięte w równaniach (s) są także na przemian dodatnie i ujemne; co nam pokazuje, że ułamki rzędu (p), dzielą się na większe i mniejsze od wartości prawdziwej: mniejsze są $\frac{A}{A'}$,

$\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$ i t. d. większe zaś są $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, i t. d. przeto wartość prawdziwą jakiejkolwiek funkcji (α) rozbranę na ułamki ciągłe zawartą jest między dwoma przyległymi ułomkami pośpolitemi (p); na które się przerabiają ułamki ciągłe. Zeby więc nie stracić tej ostatniej korzyści, starać się potrzeba, aby ułamki pośpolite (p) były wszystkie dodatnie, to jest aby ułamki ciągłe były takimi; a co na jedno wychodzi; aby za wartość bliższą nie brać większej od prawdziwej ale zawsze mniejszą.

Obróćmy teraz uwagę naszą na dwa te podziały ułamków rzędu (p), któreśmy dopiero dostrzegli. Ułamki mniejsze i większe od wartości prawdziwej są:

mniejsze $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, $\frac{E}{E'}$, i t. d. większe: $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, i t. d.

chcąc mieć różnicę między dwoma przyległymi, wyciągniemy ją z równań (r) dodając dwa razem do siebie, i kładąc za $C' - A'$, cB' z równań (l); znajdziemy

$$\frac{C}{C'} - \frac{A}{A'} = \frac{e}{A'C'}$$

$$\frac{E}{E'} - \frac{C}{C'} = \frac{e}{E'C'} \text{ i t. d.}$$

jeżeli a, b, c, d , i t. d. są jednościemi; łatwo nam dowieść tak jak przedtem, iż różnica między takimi dwoma ułomkami jest najmniejszą; iż między nimi nie może żaden inny szrzkować z mianownikiem mniejszym n, p , od C' albo od A' ; ale jeżeli

$$P \text{ } a, b,$$

a, b, c, d , i t. d. są liczbami większemi od jedności, na ten czas między każde dwa przyległe ułamki tyle można szkodkujących włożyć, ile $a-1, b-1, c-1, d-1$, i t. d. zamykają jedności. Pozwólmy że n. p. $c=4$; będzie podług zrównań $(l), (k), C'=4B'+A', C=4B+A$; a przeto między $\frac{C}{C'}, \frac{A}{A'}$ można

będzie włożyć $\frac{B+A}{B'+A'}, \frac{2B+A}{2B'+A'}, \frac{3B+A}{3B'+A'}$; gdzie widzimy, że mianowniki tych szkodkujących ułamków czynią postęp arytmetyczny od A' aż do C' . Różnice między dwoma przyległemi.

$$\begin{array}{r} \frac{A+B}{A'+B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'(A'+B')} \\ \frac{2B+A}{2B'+A'} - \frac{A+B}{A'+B'} = \frac{1}{(A'+B')(2B'+A')} \\ \frac{3B+A}{3B'+A'} - \frac{2B+A}{2B'+A'} = \frac{1}{(3B'+A')(2B'+A')} \\ \frac{C}{C'} - \frac{3B+A}{3B'+A'} = \frac{1}{C'(3B'+A')} \end{array}$$

ponieważ wszystkie te różnice są dodatnie, znakiem jest, że ułamki arytmetycznie postępując rosną, co właśnie s samych pokazuje się mianowników. Aże z drugiej strony jedności są wszędzie licznikami; ułamki te są najprościęjsze tak dalece, iż teraz między dwoma temi przyległemi żaden inny nie może szkodkować z mianownikiem mniejszym od któregokolwiek z dwóch przyległych. Tę samą własność znaydziemy w ułamkach większych od wartości prawdziwej.

S tych wszystkich prawd wnosi się oczywiście, że ułamki ciągłe są najzdatniejszym rachunkiem do zbliżenia nas do prawdziwych wartości tych funkcji, których nie możemy w wyrazach całkich ogarnąć, i że na takie ułamki przerobić możemy wszystkie inne, iako to pospolite, dziesiętkowe i t. d.

Wróćmy

Wróćmy się jeszcze do równań (r); ponieważ $\frac{B}{B'}$

$$= \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'}; \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} + \frac{1}{B'C'}; \quad \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'} - \frac{1}{D'C'}; \quad \frac{D}{D'} = \frac{E}{E'} + \frac{1}{D'E'} \quad \text{i t. d. kładąc ledne wartości za dru-}$$

gie, wypadnie:

$$\frac{C}{C'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'}$$

$$\frac{D}{D'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{D'C'}$$

$$\frac{E}{E'} = \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{D'C'} - \frac{1}{D'E'}$$

nazwawszy ostatni ułomek z rzędu $p \frac{V}{V'}; \frac{V}{V'} - \frac{A}{A'} = x;$

$$\text{będzie } x = \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{D'C'} - \frac{1}{D'E'} + \frac{1}{E'F'} - \frac{1}{F'G'} + \text{i t. d.}$$

Każdy więc ułomek z rzędu (p) wyrazić się może przez ułomek pierwszy i przez różnice wszystkich środkujących; te różnice ciągną się szeregiem pospolitym odmieniającym w terminach znaki na wzajem, przeto każdy ułomek ciągły może się zamienić na szereg pospolity, w którego terminach znaki idą na przemian. Przyšliśmy więc do sposobu wracającego nas od ułomków ciągłych do szeregów; zostaje nam teraz jeszcze do rozwiązania zadanie; żeby s każdego iakiegokolwiek szeregu byle odmieniającego w terminach znaki na wzajem, zrobić ułomek ciągły. Nim przystąpiemy do tego zadania rościągającego się na szeregi iakiegokolwiek rodzaju, musimy się oświecić o początku tych szeregów które nie są zwrotnymi.

§. XLV.

Tłumaczy się
nowy rodzaj
szeregów.

Iużesmy w §. 23. piérwšzý Części, trafili byli na szeregi rodzące się s funkcyi niewymiérnych iakięgo-
kolwiek wykładnika dodatnego lub odienmęgo, cał-
kiego lub ułomkowego; gdziešmy widzieli że na ro-
zbiór tych wšzystkich wzór Newtona

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} \left(1 + \frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}, \text{ powszechnie Źuży. W nim}$$

powinnišmy byli doštrzec, że także ieden termin wy-
razić się może przez poprzedzające podług liczby
terminów w funkcyi niewymiérnej wchodzących. W
rozbiorze takowym funkcyi pokazuje się barzo wiele
prawd podobnych do tych, którešmy w szeregach
zwrotnych uważali; ale że dowód ich ścišy i-ogólny
Źużący do poparcia wypadków samęgo rachunku ie-
szcze nie iešł w mocy našzý nauki; więc ażebyšmy
nie przeštali na wierze tam gdzie nąymocnięšcie
przekonanie powinno przodkować; albo, żebyšmy
objašnień rachunku nie brali za dowody; zoštawie-
my sobie té wiadomošci do wyżšzych šwiatel. Nie
możemy się iednak w tém miešcu uwolnić od tych
szeregów, które nám będą mogły wiele pomóc w
drugim. Tomie teraźnięšzego dzieła, a które my
przynąymnię po więkšzý części będziemy mogli z
nabytych iuż początków wyciągnąć. Takiešmi są sze-
regi wypadające z rozwiązania zrównań nieoznaczo-
nych wyżšzych štopni: n. p. Maiąc zrównanie 4go
štopnia: $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$, i chcąc y wyrazić przez
 x , nie możemy tego tylko przez szeregi dokazać.
Ale nowa trudnošć która nám się tu pokazuje, zale-
ży na tém, iż w tym nowym Źeregu nie widzemy
całe wzoru, podług którego ułozyc się powinny ter-
miny, a zatem potrzeba razém pracować nad wynal-
azkiem współ-czynnika i wykładnika w každy
terminie. Newton podał na to sposób znany Geo-
metrom pod imieniem RÓWNOLEGŁOBOKU NEWTONA
(*Parallelogrammum Newtonianum*), nad którego upro-
Źszeniem pracowali niektórzy, zaniedbawšy nań
dowodu

dowodu gruntownego który Newton opuścił; niektórzy szukali go nśilnie ale z małą pomyślnością. Zaczny Geometra Francuzki J.P. Cousin Akadémik i Professor Królewki w Paryżu, podał inny sposób rozwiązujący to zadanie; który my wolimy tu krótko wyłożyć, niż zawiakłany Newtona równoległobok bez dowodu przytaczać, odsyłając czytelnika do dzieł Newtona Matematycznych (*Opuscula Mathematica*); albo do Książki Cramera: *Introduction à l'analyse des lignes Courbes*, gdzie iest dosyć iasnie wyłożony.

Ponieważ w szeregach, o iakich tu mówimy, należy nam współ-czynnik i razem i wykładniki wynależdż, wprowadzemy na obydwia ilości nieoznaczone; i tak mając zrównanie $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$ (a') a chcą y wyrazić przez x ; x będzie ilością porządkową w szeregu; czynię więc

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \text{i t. d.} \quad (b')$$

$$ay^3 = aA^3x^{3m} + 3aA^2(Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \text{i t. d.})x^{2m}$$

$$+ 3aA(Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \text{i t. d.})^2x^{2m}$$

$$+ a(Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + \text{i t. d.})^3$$

$$yx^3 = Ax^{m+3} + Bx^{m+n+3} + Cx^{m+2n+3} + \text{i t. d.}$$

Zrównanie (a') pokazuje nam, że y iest pewną funkcją x wyrażoną przez związek w tém zrównaniu zawarty, funkcją zaś x niezawisłego od żadnej szczególnej wartości: przypuściwszy że ta wartość y , oznaczą się dobrze przez zrównanie (b'), włożywszy ją w zrównanie (a') powinna ić przywiesdż do zero tak, żeby żadnej szczególnej wartości nie wprowadzić na x , a zatem żadnego związku między terminami: więc zrównanie (a') włożywszy y nie za y wartość z (b'), staie się tosamem (*Aequatio identica*) a zatem każdego w niem terminu współ-czynnik bydż powinien zero.

Wykonawszy wszystkie wyżej naznaczone działania, i kładąc każdy termin pod przyzwoitą sobie potęgą x , potrzeba nam bydż troskliwemi, aby żadnego terminu w dalszym ciągu nie opuścić, któryby do

Teorya I.P.
Cousin do re.
zbierania fun-
kcyi lub zrów-
nania na szereg.

tę

tę samey potęgi x należąc; mając zaś początkowych terminów dobrze oznaczone wykładniki, poznamy łatwo wzór szeregu: poznamy także współczynniki czyniąc każdy termin szeregu równy zero: ale iakże potrafiemy wykładniki oznaczyć? Na to wypadnie nam sposób z następującej uwagi: Ponieważ w zrównaniu przerobionem zachodzą terminy, w których x ma za wykładnika pewną oznaczoną liczbę; podkładając terminy s takowemi wykładnikami pod którekolwiek terminy początkowe z wykładnikami nieoznaczonemi, i równając wykładniki nieoznaczone z wiadomemi, otrzymamy s tego porównania wartości na m, n ; rostrząsnąwszy potem czyli oznaczone wartości na m, n , dobrze się w dalszych terminach nadaia, to jest: czyli albo nowe nie wciągną wartości na m, n , przeciwnie wprzód wynalezionę; albo w porządnem następstwie utrzymują dalsze terminy; to znaczywszy wszystko, pewni jesteśmy że terminy były dobrze podłożone, i wartości na m, n , dobrze oznaczone: gdyby zaś iaką w dalszym ciągu pokazała się nieprzyzwoitość, potrzeba to pokładanie odmięniać póty; póki nie trafiemy na wartości i szereg od wszelkiej nieprzyzwoitości wolny. A ponieważ to podkładanie terminów z wykładnikami znanemi zawisło od naszego upodobania, jeżeli się przytrafi, że to podkładanie kilka razy odmięnione żadney nieprzyzwoitości nie wprowadzi w wypadkach; otrzymamy kilka szeregów, s których każdy da wartość na y , stółowną do związku w zrównaniu (a') zawartego: co właśnie z naturą zrównań dobrze się zgadzając; zrównanie bowiem (a') będąc czwartego stopnia mieć powinno cztery pierwiastki, którym odpowiadać powinny cztery różne szeregi na y , wynikające s czterech utożeń terminów znanych pod nieznanemi. Pamiętajmy na te wszystkie uwagi w następującym rachunku: Pierwszy układ terminów z zrównania przerobionego jest:

$$aA^3x^3m$$

$$\left. \begin{aligned} & aA^3x^{3m} + 3aA^2Bx^{3m+n} + 3aAB^2x^{3m+2n} \\ & \quad + 3aA^2C \end{aligned} \right\} x^{3m+2n}$$

$$-ax^3 - Ax^{m+3} - Bx^{m+n+3} - Cx^{m+2n+3}$$

$$\left. \begin{aligned} & + 3aA^2Dx^{3m+3n} + 3aA^2Ex^{3m+4n} \\ & + 6aABCx^{3m+2n} + 3aB^2Cx^{3m+3n} \\ & + aB^3x^{3m+3n} + 3aAC^2x^{3m+2n} \\ & + 6aABCx^{3m+2n} \end{aligned} \right\} \text{ i t. d. } = 0.$$

$$-Cx^{m+2n+3} - Dx^{m+3n+3}$$

równiając wykładników $3m=3$, $m=1$, $3m+n=m+3$,
s kąd $n=1$; co się barzo dobrze z dalszym postępem
terminów zgadza: czyniąc teraz każdego współczyn-
nika zero, wypada: $aA^3-a=0$, $A=1$, $3aA^2B-A=0$,
czyli $B=\frac{1}{3a}$, to samo dalej czyniąc znajdziemy

$$C=0, D=-\frac{1}{81a^3}, E=\frac{1}{243a^4}, \text{ i t. d. przeto}$$

$$y=x+\frac{x^2}{3a}+0-\frac{x^4}{81a^3}+\frac{x^5}{243a^4}+\text{ i t. d. } \quad (b'')$$

Drugi raz układając wypadnie:

$$\left. \begin{aligned} & aA^3x^{3m} + 3aA^2Bx^{3m+n} + 3aAB^2x^{3m+2n} \\ & \quad + 3aA^2C \end{aligned} \right\} x^{3m+2n}$$

$$-Ax^{m+3} - Bx^{m+n+3} - Cx^{m+2n+3} - ax^3$$

$$\left. \begin{aligned} & + 3aA^2Dx^{3m+3n} + 3aA^2Ex^{3m+4n} \\ & + 6aABCx^{3m+2n} + 3aB^2Cx^{3m+3n} \\ & + aB^3x^{3m+3n} + 3aAC^2x^{3m+2n} \\ & + 6aABCx^{3m+2n} \end{aligned} \right\} \text{ i t. d. } = 0.$$

$$-Dx^{m+3n+3} - Ex^{m+4n+3}$$

$3m=m+3$ s kąd $m=\frac{3}{2}$, $3m+n=m+n+3=3$, $n=-\frac{3}{2}$,

$$A^3a-A=0, A=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}, 3aA^2B-B-a=0, B=\frac{1}{2}a,$$

$$C=\mp\frac{3a^3}{8\sqrt{a}}, D=\frac{1}{2}a^4, E=\mp\frac{51a^6}{128\sqrt{a}}, \text{ i t. d.}$$

a ponieważż

a ponieważ A, C, E , i inne na przemian terminy mają dwie wartości do dwóch znaków przywiązane; powstaną z nich dwa szeregi:

$$y = a^{-2}x^2 + \frac{1}{2}a - \frac{5}{8}a^2x^{-2} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} - \frac{51}{128}a^2x^{-2} + \text{i t. d.} \quad (c')$$

$$y = -a^{-2}x^2 + \frac{1}{2}a + \frac{5}{8}a^2x^{-2} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} + \frac{51}{128}a^2x^{-2} + \text{i t. d.} \quad (d')$$

Trzeci jeszcze układ szeregu jest ten:

$$\begin{aligned} & Ax^{m+3} + Bx^{m+n+3} + Cx^{m+2n+3} + Dx^{m+3n+3} \\ & + ax^3 - A^3ax^{3m} - 3AA^2Bx^{3m+n} - 3AA^2C \} x^{3m+2n} \\ & - 3aAB^2 \} \end{aligned}$$

$$+ Ex^{m+4n+3}$$

$$- 3aA^2D \} x^{3m+3n}$$

$$- 6aABC \} \\ - aB^3 \}$$

i t. d. = 0.

$m+3=3$, s kąd $m=0$ $m+n+3=0$, $n=-3$, współczynniki zaś $A=-a$, $B=-a^4$, $C=-3a^7$, $D=-12a^{10}$, $E=-55a^{13}$; zaczem czwartą wartość na y .

$$y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \frac{55a^{13}}{x^{12}} - \text{i t. d.} \quad (e')$$

S czterech więc wynalezionych wartości na y (b''), (c'), (d'), (e'), podług różnych okoliczności zadania lub wartości x , wybrać można szereg naybarziefy malejący. Jeden ten przykład wystarczy spodzielić na objaśnienie tęg o szeregach nauki. W wyższych Matematyki częściach będziemy mieli sposobność pomówić o nięg obszernięy.

Wyłożone dotąd sposoby powinny nasz oświecić o różnych gatunkach szeregów, na które się rozbiierać mogą funkcy lub zrównania nie mogące bydź albo dokładnie rozwiązane, albo w całkię wartości wyrażone zupełnie, co wszystko jest przedmiotem Teoryi zbliżania (*Approximatio*), cząstki nayważnięfzey i naypotrzebnięfzey do rozwiązania więkfzey liczby pytań Fizycznych. Wróćmy się teraz do ułomków ciągłych.

§. XLVI.

Przebiegliśmy różne gatunki szeregów, i sposoby przerobienia na nie różnych funkcji i zrównań, a to tym końcem, abyśmy z rozległą wiadomością funkcji, mogli ogólniejszą poznać ułomki ciągłe, którzyśmy tak pożyteczne wytknęli własności. Ostatnia z nich nauczyła nas, że nie tylko szeregi zwrotne, ale nawet inne iakiegokolwiek rodzaju, byleby w terminach znaki odmieniały na wzajem, mogą się na ułomki ciągłe przerobić. Zebyśmy ten sposób mogli iasniejszy i powszechniejszy stawić przed oczy, weźmy ułomek ciągły nayogólniejszy:

Przerabiała się
szeregi na ułomki
ciągłe.

$$a+a'$$

$$\frac{b+b'}{a+a'}$$

$$\frac{c+c'}{b+b'}$$

$$\frac{d+d'}{c+c'}$$

$$\frac{e+e'}{d+d'}$$

$$\frac{f+f'}{e+e'} \text{ i t. d.}$$

przerabiając go częściami na ułomki pospolite tak, iak w §. 42; wyciągniemy związek między ich licznikami i mianownikami podobnie iak w §. 43.

$$A=a$$

$$A'=1$$

$$B=bA+a'$$

$$B'=b$$

(k')

$$C=cB+b'A$$

$$C'=cB'+b'A'$$

(l')

$$D=dC+c'B$$

$$D'=dC'+c'B'$$

$$E=eD+d'C$$

$$E'=eD'+d'C'$$

$$\text{i t. d.}$$

$$\text{i t. d.}$$

s tych zaś

$$(q') \quad BA'-AB'=a'$$

$$CB'-BC'=-a'b'$$

$$DC'-CD'=-a'b'c'$$

$$ED'-DE'=-a'b'c'd'$$

$$\text{i t. d.}$$

$$\frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{a'}{A'B'}$$

$$\frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = \frac{a'b'}{A'B'C'}$$

$$\frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} = \frac{a'b'c'}{A'B'C'D'}$$

$$\frac{E}{E'} - \frac{D}{D'} = \frac{a'b'c'd'}{A'B'C'D'E'}$$

$$\text{i t. d.}$$

Q

uczyni-

uczyniwszy podług §. 44. $\frac{V}{V'} - \frac{A}{A'} = x$, będzie

$$x = \frac{a'}{A'B'} - \frac{a'b'}{B'C'} + \frac{a'b'c'}{C'D'} - \frac{a'b'c'd'}{D'E'} + \text{i t. d.} \quad (a'')$$

maiąc teraz podany szereg jakkolwiek odmienniający w terminach znaki na wzajem

$$x = P - Q + R - S + T - V + \text{i t. d.} \quad (b'')$$

i chcąc go przerobić na ułomek ciągły, równam każdy jego termin s terminem szeregu (a'') , wypadnie

$$P = \frac{a'}{A'B'}, Q = \frac{a'b'}{B'C'}, R = \frac{a'b'c'}{C'D'}, S = \frac{a'b'c'd'}{D'E'} \text{ i t. d.} \quad (c'')$$

te ostatnie zrównania służyć mi powinny na oznaczenie $a', b', c', d', \text{ i t. d.}$ w funkcjach $P, Q, R, S, \text{ i t. d.}$ s których dopiero wypasdz maia przyzwoite wartości na $a, b, c, d, \text{ i t. d.}$ także w funkcjach $P, Q, R, S, \text{ i t. d.}$ do ułożenia ułomku ciągłego s szeregu (b'') . Ale wynaydując pomienione wartości starać się mamy, aby $A', B', C', D', \text{ i t. d.}$ w nich się nie znaydowały; i dla tego pracować należy nad przerobieniem zrównań (c'') na inne, w którychby $A', B', C', D', \text{ i t. d.}$ odpadły, co nam pokazuje przyczynę następującego rachunku J.P. *Eulera*.

Náprzód ponieważ $A' = 1$, mamy $a' = PB'$.

$$\frac{Q}{P} = b' \frac{A'}{C'} \quad \dots \quad b' = \frac{Q}{P} \frac{C'}{A'}$$

$$\frac{R}{Q} = c' \frac{B'}{D'} \quad \dots \quad c' = \frac{R}{Q} \frac{D'}{B'}$$

$$\frac{S}{R} = d' \frac{C'}{E'} \quad \dots \quad d' = \frac{S}{R} \frac{E'}{C'}$$

$$\frac{T}{S} = e' \frac{D'}{F'} \quad \dots \quad e' = \frac{T}{S} \frac{F'}{D'}$$

$$P - Q = \frac{a'(C' - b'A')}{B'C'} = \frac{a'c'}{C'} = \frac{PB'c'}{C'}$$

$$Q - R =$$

$$\begin{aligned}
 Q-R &= \frac{a'b'A'(D'-c'B')}{B'C'D'} = \frac{a'b'A'd}{B'D'} = \frac{QC'd}{D'} \\
 R-S &= \frac{a'b'c'A'(E'-d'C')}{C'D'E'} = \frac{a'b'c'A'e}{E'C'} = \frac{RD'e}{E'} \\
 S-T &= \frac{a'b'c'd'A'(F'-e'D')}{D'E'F'} = \frac{a'b'c'd'A'f}{D'F'} = \frac{SE'f}{F'}
 \end{aligned}$$

i t. d.

s tych zrównań w ostatnim porządku wypadają inne:

$$(P-Q)(Q-R) = PQcd, \quad \frac{B'}{D'} \text{ więc } \frac{D'}{B'} = \frac{PQcd}{(P-Q)(Q-R)}$$

$$(Q-R)(R-S) = QRde, \quad \frac{C'}{E'} \text{ więc } \frac{E'}{C'} = \frac{QRde}{(Q-R)(R-S)}$$

$$(R-S)(S-T) = RSef, \quad \frac{D'}{F'} \text{ więc } \frac{F'}{D'} = \frac{RSef}{(R-S)(S-T)}$$

i t. d.

tych ostatnich ułamków wartości wieżysz w $\frac{Q}{P}$,

$\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$ i t. d. nie zapominając że podług zrównań

(I'), $B'=b$, $D'=\frac{Pbc}{P-Q}$, otrzymamy:

$$a'=Pb \quad d'=\frac{SQde}{(Q-R)(R-S)}$$

$$b'=\frac{Qbc}{P-Q}$$

$$c'=\frac{RPcd}{(P-Q)(Q-R)} \quad e'=\frac{TRef}{(R-S)(S-T)}$$

a ponieważ podług pierwszych naszych przypuszczeń wyciągniętych z natury samych ułamków a' , b' , c' , d' , i t. d. powinny być ilościami całkiem, więc na ocalenie tej kondycyi, wypadają konieczne wartości na a , b , c , d , i t. d.

Qz

b=1

$$\begin{array}{llll}
 b=1 & \dots & a'=P & \text{Przeto ułomek ciągły równy} \\
 c=P-Q & \dots & b'=Q & \text{szeregowi } (b''), \text{ iest:} \\
 d=Q-R & \dots & c'=RP & \\
 e=R-S & \dots & d'=SQ & x = \frac{P}{1+Q} \\
 f=S-T & \dots & e'=RT & \frac{1+Q}{P-Q+RP} \quad (b''') \\
 \text{i t. d.} & & \text{i t. d.} & \frac{Q-R+QS}{R-S+RT} \\
 & & & \frac{S-T}{+ \text{i t. d.}}
 \end{array}$$

gdybyśmy nie byli wciągnięni potrzebą naznaczenia takowych wartości na a, b, c, d, e , i t. d. które nam z natury teraźniejszego rachunku wypadły, szereg (b'') i iemu równy ułomek ciągły (b''') mogłyby nam być służyć za wzór do przerabiania innych takichkolwiek szeregów na ułamki ciągłe. Muszemy dla tego na każdy gatunek szeregu podobny rachunek powtarzać i z niego przyjdź do ułamku ciągłego.

Mając n.p. szereg złożony z ułamków.

$$x = \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} + \frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \text{i t. d.} \quad (e')$$

działając tak jak w poprzedzającym, znajdziemy

$$a' = \frac{b}{P} \quad \dots \quad b=P \quad \dots \quad a'=1$$

$$b' = \frac{Pbc}{Q-P} \quad \dots \quad c=Q-P \quad b'=P^2$$

$$c' = \frac{Q^2cd}{(Q-P)(R-Q)} \quad \dots \quad d=R-Q \quad c'=Q^2$$

$$d' = \frac{R^2de}{(R-Q)(S-R)} \quad \dots \quad e=S-R \quad d'=R^2$$

$$e' = \frac{S^2f}{(S-R)(T-S)} \quad \dots \quad f=T-S \quad e'=S^2$$

$$x =$$

$$x = \frac{1}{P+P^2}$$

$$\frac{Q-P+Q^2}{R-Q+R^2} \quad (e''')$$

$$\frac{S-R+S^2}{T-S+T^2}$$

$$T-S+T^2 \text{ i t. d.}$$

Niech będzie szereg nieskończony

$$(f'') \quad x = \frac{1}{P} - \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} - \frac{1}{PQRS} + \text{i t. d.}$$

wypadnie nam przez podobny rachunek:

$$a' = \frac{b}{p} \quad b = P \quad a' = 1$$

$$b' = \frac{bc}{Q-1} \quad c = Q-1 \quad b' = P$$

$$c' = \frac{Qcd}{(Q-1)(R-1)} \quad d = R-1 \quad c' = Q$$

$$d' = \frac{Rde}{(R-1)(S-1)} \quad e = S-1 \quad d' = R$$

$$e' = \frac{T-1}{T-1} \quad f = T-1 \quad e' = S$$

$$\text{i t. d.}$$

$$x = \frac{1}{P+P}$$

$$\frac{Q-1+Q}{R-1+R}$$

$$\frac{S-1+S}{T-1+T}$$

$$T-1+T$$

$$T-1+T \text{ i t. d.}$$

mając na koniec szereg geometryczny

$$x = P - Qz + Rz^2 - Sz^3 + Tz^4 - \text{i t. d.} \quad (g'')$$

znajdziemy:

$$a' = Pb \quad b = 1 \quad a' = P$$

$$b' = \frac{Qbz}{P-Qz} \quad c = P-Qz \quad b' = Qz$$

$$Qz$$

$$c' =$$

$$\begin{aligned}
 c' &= \frac{PRcdz}{(P-Qz)(Q-Rz)} & d &= Q-Rz & c' &= PRz \\
 d' &= \frac{QSdez}{(Q-Rz)(R-Sz)} & e &= R-Sz & d' &= QSz \\
 & \text{i t. d.} & f &= S-Tz & e' &= TRz \\
 & & & \text{i t. d.} & & \text{i t. d.} \\
 x &= \frac{P}{1+Qz} \\
 & \frac{P-Qz+PRz}{Q-Rz+Q Sz} \\
 & \frac{R-Sz+RTz}{S-Tz+ \text{i t. d.}}
 \end{aligned}$$

przerabianie innych jeszcze geometrycznych szeregów znaleźć można w J.P. Eulerze *Introductio in Analysin infinitorum* T.I.p. 309. i dalej. Należałoby nam tu jeszcze wyłożyć dalsze szeregi ciągłych wartości, które odkrył W. Geometra J.P. de la Grange i podał w Pamiętnikach Akademii Berlińskiej i Paryżkiej stółując się do różnych matematycznych i fizycznych pytań, ale że tę rozległością swoją zostawimy nam mało czasu i miejsca na teoryę jeszcze zamiarowi naszemu istotną. Możemy jednak każdego czytelnika pilnego i zajętego chęcią przeniknienia w głębsze matematyczne nauki upewnić, że wyłożone przez nas ważniejsze, i trudniejsze początki dobrze ogarnąwszy, potrafi łam przez się opuszczonych wiadomości z łatwością dopełnić w dziełach wielkich Geometrów, do których zrozumienia iak przedsięwziętą od nas pracę jest nieuchronnie potrzebna, dosyć nam o tę sprawiedliwość odwołać się do każdego doświadczenia.

§. XLVII.

Zebrałwszy tę tak związaną s sobą ściśle ostatnie wiadomości, poymiemy łatwo, że celem terażniejszym go rozdziału było summowanie szeregów które nas wciągnęło w wiadomości inne s sobą związkowe. Potrafilismy wżyskich szeregów zwrotnych wynależdź summy,

summy, ale ieszcze dalecy jesteśmy od ogólnego sposobu zbierania szeregów innego rodzaju. W wyższych Matematyki częściach materia ta zatrudni nas barzo obficznie, gdzie i tak po nągłębszych uwagach i dociekaniach przestaniemy na rozwiązaniu pewnych tylko szczególnych przypadków. Nieszczęście! że poznawanie nągważniejszych skutków w naturze przywodzi nas do szeregów nieskończonych, których nie umiemy powszechnie summować, musimy przestać na zbliżaniu się do prawdy. Do doskonałości naszych o szeregach światła, co jest przyczyną, iż nągpiérwsi talentem ludzie s tak upornym zapaleń rzucają się w te tak zawikłane i pracowite ale barzo ważne dociekania. Skończmy już wiadomości tego rozdziału iedną uwagą: rozbiéraiąc funkcyę ułomkową w piérwszym rozdziale téy części na szeregi nieskończone, trafiliśmy na postępy arytmetyczne i geometryczne: s tych piérwsze zależą na iednég stateczny różnicy, drugie na iednym statecznym wielorazie czyli stółunku dwóch terminów przyległych. Zostaie nam wyłożyć w swych związkach to wszystko cokolwiek się ściąga do rachunku dwóch tych nągczęstszycch w używaniu szeregów. Postęp arytmetyczny wzrastający wyraża się ogólnie:

$a, a+b, a+2b, a+3b, a+4b, a+5b, a+6b$ i t. d. przypuściwszy że $a+6b$ jest terminem ostatnim; widzimy że ten równy jest terminowi piérwzemu powiększonemu różnicą b tyle razy powtórzoną, ile jest poprzedzających go terminów; a zatem nazwawszy liczbę terminów całego szeregu x , termin piérwszy a , ostatni n , różnicę b , będzie:

$$u = a + (x-1)b \quad (A)$$

oprócz tego dodawszy ostatni termin do piérwzégó, wypadnie taká summa, -iaką rodzi dodanie dwóch -którychkolwiek terminów równo oddalonych od skrajnych: summa więc całego szeregu równa się summie dwóch skrajnych tyle razy powtórzonéy, ile

Summowanie postępow arytmetycznych i geometrycznych prowadzi nas do nowego rodzaju zrównania funkcyi.

liczba terminów rozdzieloną przez dwa ma w sobie jedność, czyli nazwaliśmy sumę s

$$s = (a+u) \frac{x}{2} \quad (B)$$

za pomocą dwóch równań (A), (B), s pięciu rzeczy a, u, x, b, s , mając trzy znane, wynajdziemy to wszystko, cokolwiek do postępu arytmetycznego należy. Wszystkie te rzeczy nad to są łatwe abyśmy się ich kombinacją i objaśnieniem przez przykłady bawili.

Postęp znowu geometryczny wzrastający tak się ogólnie wyraża:

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6, \text{ i t. d.} \quad (a)$$

$$a, b, c, d, e, f, g, \text{ i t. d.} \quad (B)$$

Ostatni termin postępu geometrycznego (a) widzimy że się równa pierwszemu rozmnożonemu przez stosunek q wyniesiony do potęgi, której wykładnik oznaczają liczbę terminów całego szeregu zmniejszoną jednością, czyli, nazwaliśmy ostatni u , pierwszy a , liczbę terminów x ,

$$u = aq^{x-1} \quad (C)$$

Jeżeli przez szereg (B), wyrazić chcemy postęp geometryczny (a), będą równania $b=aq, c=bq, d=cq, e=dq, f=eq$, i t. d.

$$\text{zaczęliśmy} \dots b+c+d+e+f = (a+b+c+d+e)q.$$

w tej sumie widzimy że pierwszemu członkowi równania brakuje pierwszego terminu, a drugiemu członkowi ostatniego, to jest: $s-a = (s-u)q$, skąd

$$s = \frac{uq-a}{q-1}, \text{ czyli } s = \frac{aq^x-a}{q-1} \quad (D).$$

z dwóch równań (C), (D), będziemy mogli s, a, u, q , wynaleźć za pomocą prawideł wyłożonych w I. Części na równania, lecz chcąc wynaleźć liczbę terminów x , te prawidła wcale nam nie posłużą. Owoż nowy cale dla nas rodzaj rachunku! gdzieś to niewiadomą jest wykładnikiem funkcji znany. W całym

całym dotąd ciągu naszej nauki nie uważaliśmy w wykładnikach tylko ilości znane, lub liczby; teraz pokazało się iż zadania różne mogą nas przyprowadzić do zrównania, gdzie ilość nieznaną będzie wykładnikiem funkcyi iakięj: co nam otwiera pole do nowych dostrzeżeń w następującym rozdziale.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Funkcye wykładnicze odkrywają nam pierwszy rodzaj funkcyi przestępnych, czyli LOGARYTMY; których się tłómaczą własności, użycie, sposób rozbiérania ich na szeregi, i rachowania z nich Tablic Logarytmów.

§. XLVIII.

Wykładniki znane w iakięjkolwiek ilości lub funkcyi były zawsze skazówkami potęg we wszystkich dotąd naszych uwagach, wszakże wprowadzone są dla skrócenia wyrazów funkcyi wypadające z mnożenia ięj samęj przez się. Té wykładniki stając się ilościami odmiennymi lub nieznanymi, nie mogą tracić swęj istotnéj własności. Wystawiwszy sobie funkcyą a^x ; ta funkcyą będzie koniecznie odmienną; wszystkie ięj odmiany zawisły od odmian x ; możemy więc tę funkcyą wyrazić przez inną odmienną y , to jest $a^x = y$. A ponieważ wartości y zawisły od wartości x , i wzajemnie wartości x , od wartości y , a będąc zawsze statecznym; y staie się funkcyą x , i wzajemnie x funkcyą y . Nie zapominajmy bowiem o téj przestrodze, że kiedy ilość odmienną wyrażamy przez drugą odmienną, całą wartość takiego wyrazu szacujemy z ilości odmiennych, a ilości stateczne, jaką jest a , nie wchodzą na ten czas w naszą uwagę dla tego że w rozumowaniach naszych bączyć

Uwagi nad wykładnikami odmiennymi prowadzą nas do poznania Logarytmów.

Qs powinniśmy

powinniśmy na wszystkie odmiany funkcji i ich sfunkcji, w które, ilości stateczne bynajmniej nie wpływają.

Ieżeli x jest ilością odmienną i razem wykładnikiem czyli skazówką potęg, x przechodzić może przez wszystkie, które się tylko wymyślić mogą wartości znane, a przeto y przechodzić także będzie przez wszystkie mogące się pomyśleć potęgi a , to jest przez całkowite lub ułamkowe, dodatnie lub ujemne. Ieżeli x przejdzie przez liczby następujące po sobie w porządku naturalnym 0, 1, 2, 3, 4, 5, i t.d. czyli przez postęp arytmetyczny; y przejdzie przez wszystkie porządki idące potęgi a ; $a^0, a, a^2, a^3, a^4, a^5$, i t.d. czyli przez postęp geometryczny; będzie więc postępowi arytmetycznemu x , odpowiadać y w postępie geometrycznym. Aże-wiemy z Arytmetyki że ułożymy dwa postępy liczb odpowiadające sobie, jeden arytmetyczny, a geometryczny drugi, pierwszy nazywamy się Logarytmem drugiego; będzie więc x Logarytmem y : co wyrażać odtąd będziemy $l.y$, i zrównanie $a^x=y$ będzie zrównaniem logarytmicznym, w którym to, co jest funkcją y , nazywamy się logarytmem, to jest $x=l.y$. W nauce więc logarytmów trzy rzeczy zachodzą do uważania, ilość stateczną a którą raz obroną jest tą samą we wszystkich wartościach x , i dla tego nazywamy się GŁOWNEM LOGARYTMÓW (*Basis Logarithmorum*), powtórę wartości różne na x , iako wykładniki potęg rachunkowych w gruncie a ; które nazwalimy logarytmami; nakoniec różne wartości y przywiązane do gruntu a raz obranego, które się zowią UKŁADEM LOGARYTMÓW (*Systema Logarithmorum*).

W układzie Logarytmów obrówszy liczbę pewną za grunt, wszystko zawisło od wartości różnych na x , biorąc $x=0$, wypadnie $y=1$, czyli $0=l.y$; w jakimkolwiek więc układzie, logarytm jedności jest zero; jeżeli za x będą brane liczby całkowite dodatnie lub ujemne; w pierwszym przypadku y będzie wyrażać
różne

różne potęgi przez liczby wzrastające $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7$, i t. d. w drugim zaś przypadku przez liczby ubywające $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4}$, i t. d. przeto wszystkie liczb całkowitych zamkniętych między dwiema granicami 0, ∞ , Logarytmy są dodatnie; które tem barziej rosną, im liczba jest znaczniejsza: wszystkich zaś ułomków zawartych między $-\infty$, i 0, Logarytmy są ujemne; które tem się stają większe, im liczba barziej ubywa, tak dalece że $l.0 = -\infty$. Przypuściwszy wartości ułomkowe dodatnie lub ujemne na x , n.p. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}$, i t. d. y stanie się $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{2}{3}}$,

i t. d. czyli $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a^2}$ i t. d. aże cechy pierwiastkowe mają wielorakie znaczenia; każdy takowy wyraz na y i cały układ logarytmów należałby do kilku wartości, przez co byłby wątpliwym, co się także pokazuje w ułomkach ujemnych na x . Przystawiając zaś za x wartości niewymiérne, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{n}$, i t. d. y byłoby równe potędze wykładnika niewymiérnego, które nie mogą naznaczyć zupełnie, nie wiedzielibyśmy nawet wyrazu takiej funkcji.

Idźmy inż do uważania różnych wartości na gruncie a ; wzięwszy $a=1$ za x zaś iakiekolwiek bądź liczby, wszystkie wartości p i cały układ logarytmów zamienia się na jedność: obrówszy zaś za a liczbę większą od jedności ale ujemną, $a^x=y$ da wartości dodatnie na y , kiedy x będzie liczbą całą parzystą; kiedy zaś x będzie liczbą całą nieparzystą, wartości na y będą ujemne, układ więc takowy logarytmów zamykałby razem liczby dodatnie i ujemne. Jeżeli zaś za x w tymże samym przypadku kładź będziemy ułamki dodatnie lub ujemne, wartości na y częścią będą rzetelne a częścią uroione. S tych wszystkich uwag zasadzonych na własnościach funkcji wykładniczych i zrównaniu $a^x=y$, pokazuje się oczywiście, że do wygodnego i rzetelnego układu logarytmów gruncie a bydz powinien koniecznie liczbą

dodatną większą od jedności; wartości zaś na x być powinny wymierne. Wziąwszy n.p. $a=10$. wypadnie nam układ

Liczby - - - 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000. i t. d.
Logarytmy 0. 1. 2. 3. 4. 5. i t. d.

tak dalece: że wszystkich liczb, które są zupełnemi potęgami gruntu 10. logarytmy są całki zamykające $n-1$ jedności, gdzie n znaczy liczbę figur wchodzących w potęgę 10. Wszystkich zaś liczb, które nie są potęgami gruntu, logarytmy być nie mogą ani całki ani wymierne; ale wszystkich liczb szrodkujących między 1 i 10, logarytmy będą zawarte między 0 i 1, to jest będą >0 , ale <1 ; wszystkich zaś szrodkujących między 10 i 100, logarytmy będą większe od jedności, ale mniejsze od 2; wszystkich szrodkujących między 100 i 1000, będą większe od 2, ale mniejsze od 3. i t. d. Będą więc takowych liczb logarytmy zamykać figury całki i łamane. Pierwsze oznaczają miejsce dwóch przyległych potęg gruntu, między którym liczba podana szrodkuje, i nazywają się CECHAMI (*Characteristicae*). Ponieważ cechy logarytmów wypadają zaraz z liczby figur wchodzących w liczbę podaną; pisanie ich w tablicach logarytmów jest wcale niepotrzebne, ile że to przywiązuje logarytm do jedney tylko liczby, który być może do barzo wielu liczb rościagniony odmieniając cechę.

Chociaż logarytmy niezupełnych potęg gruntu, nie mogą być dokładnie ani wymiernie naznaczone, nie idzie jednak zatem że są niewymierne: pozwólmy bowiem że b wyraża liczbę całką wymierną nie będącą potęgą gruntu a , gdyby iey logarytm był niewymierny, szłoby zatem że $l.b = \sqrt[n]{n}$, a przeto $b = a^{\sqrt[n]{n}}$, co jest przeciwko pierwszemu przypuszczeniu. Wnieśmy więc że logarytmy liczb które nie są potęgami gruntu, a które my odtąd nazywać będziemy szrodkującemi, ani są wymierne ani niewymierne, to jest, nie należą do żadnego podziału funkcyi alge-

algebraicznych; i dla tego logarytmy są funkcjami prawdziwie PRZESTĘPNEMI.

Rozstrząśniemy teraz wszystkie działania zachodzące w logarytmach. Niech będą dwie liczby iakiękolwiek y, u , których logarytmy są x, z , w tymże samym gruncie a ; będzie $a^x = y$, $a^z = u$; mnożąc te równania przez się, wypadają: $a^{x+z} = yu$, przeto $x+z = l.yu$: logarytm więc mnogości równy jest summie logarytmów wszystkich mnożników. Dzielać zaś te

Rozwiązuje się równania przestępne za pomocą logarytmów.

samé dwa równania otrzymamy $a^{x-z} = \frac{y}{u}$, zaczęm

$x-z = l. \frac{y}{u}$ to jest: logarytm wielorazu jest równy

różnicy logarytmów ilości podzielnej i dzielącej: to ostatnie prawidło służy na wszystkie ułomki.

Ieżeli $a^x = y$ będzie $a^{nx} = y^n$, a przeto $nx = l.y^n$, a ponieważ $x = l.y$ więc $nx = n.l.y = l.y^n$: kiedy n jest liczbą całkową wzór $n.l.y = l.y^n$ służy na wynoszenie do potęg funkcji za pomocą logarytmów, to jest: że logarytm iakiękolwiek potęgi równy jest logarytmowi samej ilości rozmnożonemu przez wykładnika potęgi: kiedy zaś n jest liczbą łamaną wzór $n.l.y = l.y^n$ służy na wyciąganie pierwiastków. Niech bę-

dzie n. p. $n = \frac{1}{3}$ będzie $\frac{1}{3}l.y = l.\sqrt[3]{y}$; to jest: że logarytm iakięgokolwiek pierwiastku jest równy logarytmowi ilości rozdzielonemu przez wykładnika pierwiastku. Działając więc w liczbach przez logarytmy mnożenie zamienia się na dodawanie, dzielenie na odciąganie, wynoszenie do potęg na mnożenie, a wyciąganie pierwiastków na dzielenie proste, co niezmiernie ułatwia náypracowitsze arytmetyczne działania.

We wszystkich tych kombinacyach rozwiązując równanie $a^x = y$ czyli $x = l.y$ opuściliśmy $l.a = 1$. pifząc $x = l.y$, zamiast $x.l.a = l.y$; ponieważ rachowaliśmy zawize w gruncie a ; gdybyśmy atoli rachowali w gruncie

w gruncie innym, $l.a$ nie byłby iednością, a przeto nie mógłby być opuszczony. Po tych uwagach rozwiążemy barzo łatwo zrównanie (D) zestawione na końcu poprzedzającego rozdziału $s = \frac{aq^x - a}{q - 1}$, czy-

$$\text{li } \frac{s(q-1)+a}{a} = q^x, \text{ a przeto } x \cdot \log.q = l. \frac{s(q-1)+a}{a} \\ = l.(sq-s+a) - l.a, \text{ --- } x = \frac{\log.(sq-s+a) - l.a}{\log.q} \text{ wi-}$$

Historia tego
wynalazku.

dzemy więc że takowy sposób rozwiązań zrównań nie podobny jest całę do tego, któryśmy w pierwszemy części podali, i dla tego działanie to nazywa się przestępnem, tak iako funkcyą w zrównanie wchodzącą a zawistą od logarytmów, ma imię funkcyi przestępney. Użycie więc logarytmów jest barzo rozległe nie tylko do ułatwienia działań arytmetycznych w liczbach, ale też i do rozwiązań takowych zrównań, gdzie ilość nieznaną wchodzi za wykładnika. Z niego wypływa nieuchronna potrzeba táblíc logarytmicznych na wszystkie liczby, które s całym tym rachunkiem były nieznané aż do czasów Nepera. Tén w Roku 1614 odkrył go Geometrom w dziele: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*, i ułożył táblíce logarytmów na cały rachunek trygonometryczny. Układ iego má za grunt liczbę 2, 71828 i t. d. który potém poznáwłszy nie ze wszystkiém wygodny, przerobił na inny, gruntu 10. Pracując nad doskonaleniem i rościąganiem nowéy teoryi w śród powszechnéy sławy umarł Roku 1618, i Synowi dopiero iego dostało się wyiawić tén nowo przerobiony układ w dziele: *Appendix de Logarithmorum praestantiori usu*. Winniśmy gorliwéy pracy Henryka Briggs Profefsora Geométryi w Oxford rościągnię nie rachunku logarytmicznego do liczb naturalnych. Godny tén wdzięczności Matematyk po przeczytaniem pierwszém dziele Nepera udał się do niego, a obiawłszy dobrze wyłożoné sobie grunta téy teoryi i za-

myśli

myśli wynalazcy, iął się z nieśpracowaną cierpliwością téj pracy, wyrachował logarytmy liczb naturalnych w gruncie 10. i wydał je w Londynie Roku 1624. pod tytułem *Arithmetica Logarithmica*, które dziś powszechnie używane, mają imię LOGARYTMÓW BRIGGIUSZOWYCH (*Logarithmi Briggsiani*). W dziele dopiero wspomnionem znaydziem logarytmy liczb od 1. do 20.000 i od 90.000 aż do 101.000; w wstępie zaś całą teorią tego rachunku wyłożoną. Róspoczął także Briggs podług tego układu rachować logarytmy linii trygonometrycznych, ale w ciągu tego dzieła umarł, które po nim Henryk Gellibrand Astro-nomii w Londynie Profesor dokończywszy, wydał w Xiążce *Trigonometria Britannica* Roku 1630. Na koniec R. 1633 *Adriaen Ulaq* Niderlandczyk zos-tawioną przez Briggs szparę w logarytmach liczb naturalnych zapełnił i tablice trygonometryczne z więk-szą dla użycia wygodą przez dziesiątki wtóre (*mi-nuta secunda*) postępując, ułożył w dziele *Trigono-metria Artificialis*.

Neper wyciągnął sposób rachowania logarytmów z uwagi nad biegiem przyśpieszonym i jednostajnym. Myśl ta spólna *Newtonowi* w innym rodzaju rachun-ku a daleką od naszych początków nie może należyć do teraźniejszego zamiaru. Każdy za pomocą *Mechaniki* potrafi ją zrozumieć w samych oryginalnych piśmach Nepera, i cokolwiek do historyi tego wynalazku należy, wyczytá w Xiążkach dopiero wyli-czonych, które chociaż bárzo rzadkie² naydują się w Bibliotece Szkoły głównej tutajszey. Wszystkie te dzieła będą zawsze szacowną dla potomności pamią-tką tak nadzwyczajney pracy i cierpliwości takiej w owych czasach rachunek logarytmów wyciągał.

§. XLIX.

Kiedy Algebra rościągła swoje pomocy po wszy-
stkich matematycznych częściach, zaczęli myśleć Geo-
metrowie o użyciu iey do rachowania logarytmów
liczb szrodkiących. Aże te logarytmy sposobem
tylko

Rozbieraia się
logarytmy i
funkcye wy-
kładnicze na
szeregi.

tylko bliskim mogą się wyrazić, szukali Geometrowie tego rachunku w szeregach nieskończonych jako jedynym instrumencie w takim przypadku. Szeregi atoli nieskończone iakośmy widzieli wynikaia tylko z rozbioru funkcyi ułomkowych albo niewymiernych; logarytmy zaś liczb szrodkuiających nie należąc do żadney téy klasy funkcyi Algebraicznych nie mogły podpadać pod takie szeregi iakiśmy uważali. Ta trudność powinna była wstrzymać wszystkie usiłowania Geometrów, ale geniusz barziéy się nią zapala niż zraża; a tajemnica póty cięży na jego spokoyności, póki iéy prawdzie nie wydrze. Takim pokazał się właśnie J. P. Euler który nową cale drogą przyzedeł do sposobu wyrażenia logarytmów i wszystkich funkcyi wykładniczych przez szeregi nieskończone. Zabawmy się nad tak piękną geometryczną sztuką którą żebyśmy w iak najiaśniejszym postawili widoku; zbliżmy do siebie świeżo dostrzeżone logarytmów własności.

Ponieważ $a^x = y$ uczy nás, że odmieniaiać a przy téy samey wartości na x , tworzymy różne układy logarytmów; odmieniaiać zaś x przy wartości stateczney na a wyciągamy logarytmy różnych liczb w tymże samym układzie; ieżeliśmy przywykli do prawdziwie geometrycznych uwag, powinniśmy się zazać zapytać o stófunek zachodzić mogący między logarytmami pewney liczby n , braniami w różnych układach, i między logarytmami liczb w tymże samym układzie. Na ten koniec wystawmy sobie dwa grunta a , e ; a wiaźwszy liczbę iakąkolwiek n przypuścmy że iéy logarytm w gruncie a iest p , w gruncie zaś e iest q ; wypadną nám dwa zrównania $a^p = n$, $e^q = n$; przeto $a^p = e^q$ $p \cdot \log. a = q \cdot \log. e$. . .

$$\frac{p}{q} = \frac{\log. e}{\log. a} : \text{to ostatnie zrównanie uczy nás że stó-}$$

funek zachodzący między logarytmami dwóch układów iest cale nie zawisły od liczby, ponieważ n wypadło z zrównania; ale ten stófunek całkiem zawisł od

od gruntów. Równając więc logarytm jakiegokolwiek bądź liczby wzięty w jednym układzie, z logarytmem téżże saméj liczby wziętym w drugim układzie, wypadnie nam pewien stosunek zachodzący między logarytmami dwóch tych układów; ten stosunek ponieważ się nie odmienia z odmianą liczb ale z odmianą gruntów, idzie zatem, że w każdym układzie jest liczba wchodząca w skład każdego logarytmu, która całkiem zawiśłą będąc od gruntu, rozróżnia jeden układ od drugiego tak, że za odmianą téj liczby odmienia się grunt, i za odmianą gruntu odmienia się ta liczba wyrażająca stosunek logarytmów w jednym układzie do logarytmów drugiego układu.

To dobrze zrozumiałwszy uważmy, że sposób wyrażenia logarytmów przez szereg nieskończony zawiśł od przerobienia $a^x=y$ na funkcją dwó lub kilku-wyrazową niewymierną jakiegokolwiek wykładnika. Upatrujemy tego sposobu w odmianach x , ponieważ od tych, wartości y zawiśły. Uczyniwszy $x=0$, mamy $y=1$ we wszystkich powszechnie układach; więc jeżeli wykładnik $x=0$ powiększy się liczbą f nieskończenie się mało różniącą od zero; y powiększy się także liczbą w nieskończenie się mało różniącą od jedności; to jest będzie $a^f=1+w$; aże $a^0=1$ należało do wszystkich układów, w równaniu $a^f=1+w$, w będzie funkcją f , ale w swej wielkości zawiśnie od gruntu a : będzie więc w zamykać w sobie f i razem liczbę zawiśłą od gruntu, wyrażającą stosunek logarytmów w jednym układzie do logarytmów drugiego układu; nazwiemy taką liczbę k , ponieważ k wymierza wartość w podług wartości gruntu a , będzie $w=kf$, a zatem $a^f=1+kf$ $a^{fs}=(1+kf)^s$, potrafiliśmy więc y rozebrać na funkcją dwó-wyrazową i wynieść do potęgi s ; trzeba nam teraz wynaleść związek między k , i a , oprócz tego chcąc funkcją a^{fs} rościagnąć na wszystkie liczby skończone, potrzebaby g nadać taką wartość, którą by rozmnożoną przez f dała liczbę skończoną, co

R

łatwo

łatwo otrzymać, bo jeżeli $gf=x$, będzie $g=\frac{x}{f}$.

ponieważ f podług 1go przypuszczenia jest liczbą nieskończenie małą, g będzie koniecznie liczbą nieskończenie wielką; mnogość zaś z dwóch takowych liczb wypadła skończoną. Tym sposobem J. P. Euler uważając każdą liczbę skończoną jako mnogość z nieskończenie małej przez nieskończenie wielką, przyszedł do przerobienia logarytmu na wyraz wykładniczy dwó-wyrazowy, ten zaś na szereg nieskończony. Patrzmy na ciąg tego rachunku i jego wypadki. Ponieważ $af^s=(1+fk)^s=1+gkf+\frac{g(g-1)}{1 \cdot 2}$

$$k^2f^2+\frac{g(g-1)(g-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3f^3+\frac{g(g-1)(g-2)(g-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}k^4f^4$$

i t. d. g będąc liczbą nieskończenie wielką, wszystkie wartości skończone przed nią nikną; można więc za $g-1$, $g-2$, $g-3$, i t. d. wziąć g ; oprócz tego

$f=\frac{x}{g}$ kładąc zaś te wartości w szereg dopiero roze-

brany, odmieniemy go na $a^x=(1+\frac{kx}{g})^s=1+kx+$

$$\frac{k^2x^2}{1 \cdot 2}+\frac{k^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}+\frac{k^4x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}+i \text{ t. d. } \dots (A).$$

to zrównanie daie nam wyraz funkcyi wykładniczej przez szereg nieskończony, ale funkcyi takiej, gdzie ilość stateczna jest gruntem logarytmów; chcąc więc wyrazić przez szereg nieskończony funkcją b^x tak, żeby b nie brać za grunt, znaleźć nam trzeba związek między b^x i między a^x . Na ten koniec nczyńmy $b=a^n$, $b^x=a^{nx}$, $n=\log.b$ w gruncie a ; kładąc w zrównanie (A) $x=nz$, $n=l.b$ otrzymamy:

$$b^x=1+\frac{kz}{1}\log.b+\frac{k^2z^2}{1 \cdot 2}(\log.b)^2+\frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(\log.b)^3+i \text{ t. d. } (B)$$

Zrównanie (B) wyraża funkcją wykładniczą przez szereg tak, że ani k , ani $\log.b$. nie należą do gruntu b , ale

k , ale do gruntu a . Położywszy teraz w równaniu (A) $x=1$, otrzymamy:

$$a = 1 + k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \frac{k^5}{1.2.3.4.5} + \text{it. d.} \quad (C).$$

Ostatnie to równanie daje nam związek między k i a , i uczy nas, że grunt a zawiera całkiem od k , i jest ową liczbą sfunkową wypadającą z porównania logarytmów dwoiakiego układu, i zawiera całkiem od gruntu, iakośmy na początku tego §. dostrzegli. Mając więc takową liczbę każdemu układowi szczególną, wynaydziemy grunt tém bliższy prawdy, im szereg (C) będzie barziy malejący, to jest im k będzie mnieysze. Potrzebaby nam ieszcze k wyrazić przez a , czego nie łatwo dokazać szeregami. Spółób popoly w Algebrze na tén przypadek nazywá się Powrót Szeregów (*Retour des Suites*): żeby go tu można użyć potrzeba náprzód przypuścić że szereg (C) jest malejącym, to jest że k jest liczbą barzo małą: jeżeli tak jest, w równaniu:

$$a - 1 = k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} + \text{it. d.}$$

uczyniwszy $a - 1 = z$, możemy wziąć $z = k$; a chcąc mieć k wyrażone dokładniy przez z , zmyślimy sobie że jest dané przez szereg:

$$k = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{it. d.}$$

a biorąc tę wartość za k w drugim członku równania (C) przywiedzionego do zero, znaydziem:

$$k = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{it. d.}$$

$$\frac{k^2}{1.2} = \frac{1}{1.2} A^2 z^2 + \frac{1}{1.2} 2ABz^3 + \frac{1}{1.2} B^2 z^4 + \text{it. d.}$$

$$\frac{k^3}{1.2.3} = \frac{1}{1.2.3} A^3 z^3 + \frac{1}{1.2} A^2 B z^4 + \text{it. d.}$$

$$\frac{k^4}{1.2.3.4} = \frac{1}{1.2.3.4} A^4 z^4 + \text{it. d.}$$

+ it. d.

$$- z = - z$$

Rz

$$= 0.$$

ponieważ

ponieważ to równanie jest tożsame, każdy współczynnik z jest zero; skąd mamy tyle równań ile nam ich potrzeba na oznaczenie A, B, C, D , i t. d. znając zaś $A=1, B=-\frac{1}{2}, C=\frac{1}{3}, D=\frac{1}{12}$, a przeto

$$k=(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3+\frac{1}{12}(a-1)^4 \text{ i t. d. (D)}$$

widzimy że ten ostatni szereg nie może nam dać bliższej wartości na k w funkcji a , jeżeli a nie jest ułamkiem bardzo małym.

Wyciąga się
z równania na
zachowanie ta-
blic logary-
tmów.

Starajmy się teraz przyjść do wyrażenia logarytmu jakiejkolwiek liczby przez szereg niekończony, upatrując oraz innego równania w którymby k byłoby dokładnie wyrażone przez a . Mając na pamięci pierwsze wartości na f, g , położmy

$$(1+fk)^z = 1+z = af^z, \quad 1+fk = (1+z)^{\frac{1}{z}}$$

$$fz = \frac{g}{k} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}} - 1 \right]; \text{ aże } gf = l.(1+z); \text{ więc}$$

$$l.(1+z) = \frac{g}{k} \left[(1+z)^{\frac{1}{z}} - 1 \right]; \text{ rozebrawszy podług}$$

wzoru Newtona drugi ten równania członk na szereg nieskończony, i położywszy za $g=1, g=2, g=3$, i t. d. g ; wyp dnie:

$$l.(1+z) = \frac{1}{k} \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \text{i t. d.} \right) \quad (E)$$

żebyśmy tym barziej malejącymi otrzymali szereg, położmy znowu $af^z = (1+fk)^z = 1-z$; będzie

$$fg = l.(1-z) = \frac{g}{k} \left[(1-z)^{\frac{1}{z}} - 1 \right]; \text{ aże}$$

$$(1-z)^{\frac{1}{z}} - 1 = -\frac{z}{g} - \frac{g-1}{g \cdot 2g} z^2 - \frac{(g-1)(2g-1)}{g \cdot 2g \cdot 3g} z^3 - \text{i t. d.}$$

podług zaś pierwszego przypuszczenia $g-1=g-2=g-3=g-4$ i t. d. $=g$

$$l.(1-z) = \frac{1}{k} \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \text{i t. d.} \right) \quad (F)$$

równanie

zrównanie (F) odciągawszy od zrównania (E),
otrzymamy

$$L(1+z) - L(1-z) = L \cdot \frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{k} \left(z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + \frac{1}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9 + \text{i t. d.} \right) \quad (G).$$

to ostatecznie zrównanie służy nam na wyrażenie logarytmu iakiegokolwiek bądź liczby przez szereg nieskończony. Chcąc n.p. mieć $\log. 5$, czynię

$$\frac{1+z}{1-z} = 5, \text{ a przeto } z = \frac{4}{5}$$

$$\log. 5 = \frac{2}{k} \left(\frac{4}{6} + \frac{4^3}{3 \cdot 6^3} + \frac{4^5}{5 \cdot 6^5} + \frac{4^7}{7 \cdot 6^7} + \frac{4^9}{9 \cdot 6^9} + \text{i t. d.} \right)$$

znając k , i znaleziony szereg przerobiwszy na ułamki dziesiętkowe, kilka terminów początkowych da nam bardzo bliski logarytm liczby 5. Chcąc teraz z (G) wyciągnąć na k wyraż przez funkcją a , położmy

$$\frac{1+z}{1-z} = a, \text{ zaczęm } z = \frac{a-1}{a+1}, \text{ a ponieważ } \log. a = 1,$$

będzie z (G)

$$k = 2 \left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3 \cdot (a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5 \cdot (a+1)^5} + \frac{(a-1)^7}{7 \cdot (a+1)^7} + \text{i t. d.} \right) \quad (H)$$

jeżeli $a = 10$; będzie:

$$k = 2 \left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot (11)^3} + \frac{9^5}{5 \cdot (11)^5} + \frac{9^7}{7 \cdot (11)^7} + \frac{9^9}{9 \cdot (11)^9} + \text{i t. d.} \right)$$

co przerobiwszy na ułamki dziesiętkowe, znaydziemy:

$$k = 2,3025850929 \text{ i t. d. } \frac{1}{k} = 0,4342944819. \text{ i t. d.}$$

kładąc więc tym sposobem iakiegośmy już użyli na

5, za $\frac{1+z}{1-z}$ iakąkolwiek liczbę, wynaydziemy szereg,

którego początkowe terminy zamieniwszy na ułamki

dziesiętkowe, i té przez $\frac{2}{k}$ rozmnożywszy, wypadną

R₃ nam

nam logarytmy *Briggiusza*. Tąblice więc logarytmów tym sposobem łatwo mogą być rachowane.

Dwa główne zrównania (C), (H), dają nam związek między k , i a , tak dalece, że k iak widzimy w zrównaniach i w teoryi, ciągnie za sobą pewną wartość na grunt, i stanowi cały układ logarytmów; dla tego też wartość na k nazywa się w Geometrii FOREMNIKIEM (*Numerus regulator*). Każdy układ logarytmów ma swego foremnika i grunt, s których jeden zawisł w swęj wartości od drugiego. Uczynimy n.p. $k=1$; zrównanie (C) zamieni się na

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{i t. d.}$$

co przerobiwszy na ułamek dziesiętkowy, będzie $a=2,718281828$ i t. d. Logarytmy na taki grunt rachowane są najpierwsze logarytmy *Nepera* które dziś PRZYRONZONEMI albo HYPERBOLICZNYMI (*Logarithmi naturales, Hyperbolici*) zowią; dla tego, że przez takie logarytmy wyraża się płaszczyzna zamknięta łukiem linii krzywey zwanej *Hyperbola*. Użycie ich jest barzo rozległe w wyższych Matematyki częściach. Ilekolwiek zaś o logarytmach *Hyperbolicznych* mówić będziemy, ich grunt z dzisiejszemi Geometrami $2,7182818$ i t. d. nazywać będziemy e , tak dalece, że rozumując nad zrównaniem logarytmicznym w gruncie 10, wyrażać id statecznie będziemy przez $a^x=y$, znaczyć zaś będziemy zrównanie logarytmiczne przez $a^x=y$, ile razy rzecz będzie do logarytmów *hyperbolicznych* stosowaną.

Wszystkie zrównania któreśmy na logarytmy i funkcye wykładnicze wyżej wyciągnęli z J. P. *Eulerem*, należec będą do gruntu e uczyniwszy w nich $k=1$, i tak w układzie logarytmów *hyperbolicznych*:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{i t. d.} = \left(1 + \frac{x}{e}\right)^e$$

$$L(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \text{i t. d.}$$

$$L(1-z)$$

$$l.(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \frac{z^5}{5} - \text{i t. d.}$$

$$l. \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \text{i t. d.}\right)$$

to ostatecznie zrównanie służy nam do rachowania logarytmów hyperbolicznych iakichkolwiek liczb, chcąc n.p. mieć logarytm hyperboliczny liczby 2, czynię

$$\frac{1+z}{1-z} = 2, \text{ skąd } z = \frac{1}{3}, \text{ a przeto}$$

$$\log. 2. = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \text{i t. d.}\right)$$

Co zamieniwszy na ułamek dziesiętkowy znajdziemy $\log. 2. = 0,693147$ tym samym sposobem znajdziemy $\log. 5 = 1,609437$ - - - $\log. 7 = 1,945910$. i t. d. mając zaś niektórych liczb logarytmy, z nich wypadają logarytmy liczb innych podług wyżej wyłożonych początków. n.p. $2.l.2 = l.4$; $2.\log.5 = \log.25$; $\log.2 + \log.5 = \log.10$; $2.\log.7 = \log.49$. i t. d.

Takim sposobem J.P. Euler wyrachował náprzód logarytmy hyperboliczne aż do 26. figur na dziesięć liczb początkowych, które potem P. Wolfram Lieutenant Artylerji Rzeczy-Pospolitej Holenderskiej pociągnął aż do 10.009. wydane przez P. Schulze w Berlinie 1778 wraz z logarytmami Briggiiu/za barzo wygodnie ułożonemi. W roku 1781 widziałem w Paryżu w manuskrypcie táblíce logarytmów hyperbolicznych na liczby naturalne aż do 100.000, które Benedyktyn ieden wyrachowałszy podał do rostrzżenia Akademii umiejętności. Te approbowane od Akademii za méy ielzcie bytności zaczęto drukować.

§. L.

Poznawszy już sposób rachowania logarytmów w iakimkolwiek układzie wróćmy się teraz do rostrzżenia stófunków zachodzących między logarytmami różnych układów; i między logarytmami różnych liczb w tymże samym układzie. Co do pierwszego wyciągnęliśmy byli w §. 49. na ten stófunek zrównanie

Sposób przetrąbiania logarytmów iedné go, na logarytm y drugiego układu.

R4

wnanie

wnanie $\frac{p}{q} = \frac{\log.e}{\log.a}$ czyli $p = \frac{\log.e}{\log.a} \cdot q$ (m), co

nás uczy, że jeżeli a znaczy grunt logarytmów Briggiszowych, e zaś grunt hyperbolicznych, p logarytm liczby n należący do pierwszego, q logarytm téż samy liczby należący do drugiego układu; możemy za pomocą zrównania (m) przerobić logarytm hyperboliczny na logarytm Briggisza: jeżeli bowiem $\log.e=1$, $\log.a$ czyli $\log. hyper. 10=2,302585$; będzie

$$\frac{\log.e}{\log.a} = \frac{1}{2,302585} = 0,434294, \text{ przeto } p = 0,434294 \cdot q$$

mnożąc więc jakiejkolwiek liczby $\log. hyper. q$, przez $0,434294$, przerobiemy go na logarytm Briggisza. Chcąc zaś logarytmy Briggisza zamienić na hyperboliczne; ostatnie zrównanie daie mi

$$q = \frac{1}{0,434294} p = 2,302585 \cdot p \text{ to jest, mnożąc każdy}$$

logarytm Briggisza p , przez $2,302585$, zamieniemy go na hyperboliczny. S kąd poznaemy iak jest łatwo logarytmy iednego układu przerobić na logarytmy drugiego iakiegokolwiek. Mnożnik ten przerabiający tak logarytmy, nazywa się **ZAMIENNIK (Modulus)**.

Wszystkie zrównania na rachowanie logarytmów ustanowione różnią się foremnikiem k , który w dwóch od nás rostrzających układach wypada z rozdzielenia logarytmu hyperbolicznego q jakiejkolwiek liczby n , przez logarytm Briggisza p téż samy liczby, to jest $\frac{q}{p} = k$: przypuśćmy że $n=10$; $\log. Brigg.$

$10=p=1$. więc $q=k$, to jest foremnik układu Briggisza jest równy logarytmowi hyperbolicznemu liczby 10 . co nám się właśnie w wyższym już rachunku pokazało.

Zebyśmy nie opuścili oo do wyrazu funkey wykładniczych należy, staraymy się wzór Briggisza

$$a^x=y$$

$a^x=y$ wyrazić przez szereg nieskończony logarytmów hyperbolicznych. To zaś łatwo barzo wyciągniemy z równania (B) §. 49. położymy w niem a za b , x za z , i foremnika $k=1$, będzie

$$a^x = 1 + x \log a + \frac{x^2}{1.2} (\log a)^2 + \frac{x^3}{1.2.3} (\log a)^3 + \dots + \frac{x^4}{1.2.3.4} (\log a)^4 + \dots \quad (B')$$

funkcyą więc iakakolwiek wykładniczą może się rozebrać na szereg nieskończony za pomocą logarytmów hyperbolicznych przez użycie równania (B'), tak iako też sama funkcyą rozbierze się na szereg nieskończony za pomocą logarytmów Briggsiusza przez użycie wzoru (B) §. 49.

Zostaie nam teraz rozstrząsnąć stosunek logarytmów różnych liczb w iednym układzie. Weźmy na to dwie liczby M , N ; pierwszy logarytm w gruncie a nazwiemy p ; drugi logarytm w tymże samym układzie nazwiemy q ; wypadną równania $a^p=M$; $a^q=N$. obydwa przerobiwszy na $a^{pq}=M^q$, $a^{pq}=N^p$;

będzie $M^q=N^p$, $M=N^{\frac{p}{q}}$ uczyniwszy $M=N^{\frac{p}{n}}$ będzie $N^{\frac{m}{n}}=N^{\frac{p}{q}}$ czyli $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, te równania nie

zamykają w sobie a , więc stosunek dwóch logarytmów w tymże samym układzie jest nie zawisły od gruntu, czyli ten stosunek jest ieden we wszystkich iakichkolwiek układach: te równania nam pokazują, że logarytmy potęg téż saméj liczby w iakimkolwiek układzie tak się mają iako ich wykładniki.

S téy ostatniéj prawdy związanej z innemi wyżej wyłożonemi wypadá nam sposób użycia logarytmów liczb całkich do liczb łomanych. Wiemy náprzód że jeżeli $\log 1=0$; logarytmy wszystkich ułomków prawdziwych są odjemné: żebyśmy więc ułomki mogli łomkach,

Pokazuje się
użycie táblíc
logarytmic-
znych w u-
łomkach.

Rz

należy

należy koniecznie techę licznika uczynić większą od techy mianownika, aby reszta z odciągania wypadła dodatnią. Na tén koniec zgodzili się Geometrowie logarytmy na liczniki ułomków tak rachować, że w nich jedność ma za logarytm 10, albo 100; a przeto $\frac{1}{10} = 0,1$ ma za logarytm 9; albo 99, co łatwiej w

naępujący tablicy poznamy.

Ułomki. Ich logarytmy.

1	- - - -	10,000000	albo	100,000000
0,1	- - - -	9,000000	- - -	99,000000
0,01	- - - -	8,000000	- - -	98,000000
0,001	- - - -	7,000000	- - -	97,000000
0,0001	- - - -	6,000000	- - -	96,000000
i t. d.				

Kiedy więc mamy do czynienia z ułomkiem n. p.

$\frac{5}{465}$, bierzemy z tablic logarytm 5, i do jego techy

dodawczy 10, odciągamy od niego logarytm zwykły mianownika 465, z czego wypadnie nam logarytm, reszty 8,031170: szukam odpowiadający liczby temu logarytmowi nie mając względu na jego techę, a tę znalazłszy 10752, tylé dodaę zero przed figurami, ile cefze logarytmu brakuie jedności do dziesiątka, z tych zero jeden zastępuje miejsce liczb całkich i odziera się kreską: i tak $\log. 8,0315170$ ma liczbę od-

powiadającą $0,010752 = \frac{5}{465}$.

Przyczynę tego działania pokazują nam własności ułomków dziesiątkowych i logarytmów: powiększyć bowiem techę logarytmu dziesiątkiem, jest to liczbę temu logarytmowi odpowiadającą rozmnożyć przez 10000000000; potrzeba więc po skończoném działaniu przez tę samę liczbę wypadek cały rachunku rozdzielić, aby liczbę podaną wrócić do swęj dawnęj wartości: to dzielenie wykonywá się przez dodanie tylé zero przed figurami ile cefze brakuie jedności do

do dziesiątka. I tak w podanym przykładzie log. 3,0315170 przez swoją cechę pokazuje, że liczba mu odpowiadająca powinna mieć 2 figur, dopełniwszy ją przez zero na końcu przydanę, i całą tę liczbę potem rozdzieliwszy przez 1000000000, przypadnie przed figurami tyle zero; ile cechy logarytmu brakuje jedności do dziesiątka. Przez tę samą sztukę szukając logarytmu ułamku dziesiętkowego, bierzemy logarytm figur tego dziesiątka, jak gdyby były całkiem, kładąc za cechę liczbę tyle się od dziesiątka różniącą; ile poprzedzą zero też figury, i tak liczby 0,00174 logarytm jest 7,2430380.

Ponieważ zaś w tym użyciu logarytmów, bierzemy 10 za logarytm jedności; we wszystkich działaniach arytmetycznych musimy mieć wzgląd na 1, i ię logarytm. Wszystkie bowiem działania arytmetyczne nic innego nie są, tylko różne sposoby porównywania wielkości iakiejkolwiek z swą jednością, i wynajdowania różnych odmian wypadających albo z odmiany jedności albo z odmiany wielkości samey: i tak mnożyć n. p. liczbę a przez b , nie innego nie znaczy, tylko znaleźć wartość b kiedy iego 1 odmierza się na a , czyli znaleźć stosunek b do mnogości taki, iaki jest jedności do a , to jest $1:a::b:\frac{ab}{1}$, na-

leży więc w terażniejszem używaniu logarytmów od logarytmu mnogości odebrać logarytm jedności 10. Podobnie potrzeba mówić o dzieleniu, które zależy na wynalezieniu takiego stosunku liczby podzielnej do wielorazu, iaki jest liczby dzielącej do jedności to jest: chcąc n. p. liczbę ab rozdzielić przez b , należy rozwiązać proporcję, $b:1::ab:\frac{ab \cdot 1}{b}$ przeto należy

nam wprzód do logarytmu liczby podzielnej dodać log. 1 = 10, a dopiero od téj summy odebrać logarytm liczby dzielącej. Te wszystkie względy na jedność i ię logarytm odpadają w liczbach całkich,

Rę

ponieważ

ponieważ tam $\log. 1 = 0$. Zobaczymy te wszystkie prawidła w przykładach.

Przykład mnożenia: niech będą ułamki $\frac{3}{124} \times \frac{25}{732}$

$$\log. \frac{3}{124} = 8,3836996.$$

$$\log. \frac{25}{732} = 3,6720284.$$

$\log. \text{mnożności} = 17,0557270 - 10 = 7,0557270$
któremu podług pierwszego prawidła odpowiada li-

$$\text{czba } 0,0011369 = \frac{3}{124} \times \frac{25}{732}$$

Przykład dzielenia: niech będą ułamki $\frac{1}{3082} : \frac{7}{29}$

$$\log. \frac{1}{3082} + \log. 1 = 16,5111674$$

$$\log. \frac{7}{29} = 9,3827000$$

$$\log. \text{wielorazu} = 7,1284674.$$

któremu odpowiada liczba $0,0013442 = \frac{1}{3082} : \frac{7}{29}$.

a ponieważ wynoszenie do potęg nic innego nie jest, tylko mnożenie liczby samej przez się tyle razy powtórzone, ile wykładnik potęgi zmniejszony 1, ma w sobie jedności; wyciąganie zaś pierwiastków tyleż i takimże sposobem powtórzone dzielenie; za każdym zaś mnożeniem należy odciągać od logarytmu mnogości 10; tak iak za każdym dzieleniem potrzeba do liczby podzielnej dodawać 10, idzie za tem, że wynosząc ułamek iaki do potęgi m , za pomocą logarytmów, potrzeba od logarytmu potęgi odciągnąć liczbę $10.(m-1)$: wyciągając zaś pierwiastek należy wprzód cechę logarytmu ułamku podanego powię-

kfzyć

leżyc liczbą $10.(m-1)$, a dopiero go potem rozdzielić przez wykładnika pierwiastku. Zobaczymy to w przykładach.

Przykład wynoszenia do potęg: wynaleśdź wartość $(0,05)^5$. - - - $5.\log.0,05=5.8,6989700=43,4948500$. od tej mnogości odciagnąwszy $10.(5-1)=40$, zostanie się $3,4948500=\log.(0,05)^5$, któremu odpowiada liczba $0,000003125=(0,05)^5$.

Przykład wyciągania pierwiastków. Wynaleśdź wartość $\sqrt[6]{0,15}$. - - - $\log.0,15+40=49,1760913$. rozdzieliwszy go przez 6, wypadnie logarytm pier-

wiastku $8,1960152$ którego liczba $0,015704=\sqrt[6]{0,15}$.

Takim sposobem przytósowane logarytmy do ułomków niezmiernie rachunki arytmetyczne ułatwiają, i służą do objaśnienia tábliec trygonometrycznych, dla których prawie najszczęśliwiej ten rodzaj rachunku był wynaleziony, i do nich iedynie użyty od Nepera. S tegoć to podobno powodu J. P. Euler przytósowałszy barzo szczęśliwie rachunek Algebraiczny do logarytmów, obrót sobie zaraz rachunek trygonometryczny do wydoskonalenia w tymże samym widoku, ale z większą daleko pomyslnością, i z niezmiernie rozleglejszym dla geometrii pożytkiem. Wypada nam o nim z barzo prostego rzeczy porządku mówić. Jeżeli bowiem we wszystkich matematyki częściach, gdzie rachunek arytmetyczny wchodzi, pomoc Algebry przez ogólnosc swoich znaków i prawideł, rościągá barzo daleko granice prąwdy; w trygonometrii zaś te która jest czystem przytósowaniem arytmetyki do geometrii, rachunek algebraiczny najszczęśliwiej udadźby się powinién, i przyłożyć się do doskonałości ledwo nie wszystkich matematycznych nauk, i od nich zawiśłych sztuk i rzemiół, w których użycie trygonometrii jest nieuchronné. Iakóż skutek pokazał, że stworzenie tego rachunku, i wprowadzenie go w całą matematykę, będzie zawżde na czele nájpożyteczniejszyż wynalazków

wynalazków tego wielkiego Geometry. Należy do istoty naszego zamiaru wyłożyć go w całej swej obfzerności i świetle. Trzymając się ściśle naszego w tej książce przedmiotu, powinniśmy wszystkie trygonometrii początki mimo się puścić, wyciągając poprzedzający tej wiadomości po czytelniku; ale pamiętni na niedostatek narodu, w którym rozrzucone geometrii książki barzo wiele do czynienia w arytmetyce i trygonometrii zostawiły, nie usposabiając uczących się do dzisiejszego stanu matematyki; i nie poprawiając wiele niedokładnych i fałszywych tłumaczeń w stosunku liczb do linii; uznaliśmy za potrzebę, ogólny przynajmniej widok całej trygonometrii wyłożyć, i z niego wyciągnąć analityczny rachunek linii, które trygonometrycznemi nazwano.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

S pierwszych początków Trygonometrii wyciągą się rachunek LINII TRYGONOMETRYCZNYCH; tłumaczą się właściwości ŁUKÓW KOŁA (drugi rodzaj funkcyi przestępnych); sposób rachowania Tablic trygonometrycznych i ich Logarytmów: użycie nakoniec tego rachunku s poprzedzających pokazuje się rozdziałów.

§. LI.

Obráz ogólny
o wymiarach
płaszczyzn.

Wszystkie figury liniami prostymi zamknięte rozebrać się mogą na troykáty, przeto do ich wymiaru dosyć nam jest wiedzieć sposób mierzenia troykątów. Każdy troykąć má w sobie sześć rzeczy do uważania: wszystkie te wchodzą w jego rozmiar, od wielkości bowiem dwóch boków, i różney ich do siebie pochyłości, zawiśła wielkość trzeciego i jego pochyłość do pierwszych, a od wszystkich tych, wielkość

kość płaszczyny w trójkacie zawartéy. Wymiár figury dzieie się przez porównanie płaszczyny z inną płaszczyną wziętą za miarę, która się za zwyczaj brać zwykła s częsteł figury. Równanie dwóch płaszczyn rodzi stófunek, który póty nie odkryie wymiaru płaszczyny podanéy, póki go nie zrównamy z drugim stófunkiem. Drugi tén stófunek bierzemy z nauki ogólnéy stófunków czyli z arytmetyki, szukając liczby, któraby się tak miała do swoiey iedności, iako się má płaszczyna podaná do swoiey miary. I na tén ci to wynaydowaniu liczb wspomnianych, i wyrażeniu przez nie stófunku zachodzącego między płaszczynami, zależy cała część geometryi o wymiarach płaszczyn. Dowodzi ona nám, że mając kwadrat, a z iego wysokości wziąwszy część za iedność liniową, drugą znowu część równą s podstawką, s tych dwóch części zrobiwszy kwadracik mały, tego kwadracika płaszczyna, má się do płaszczyny kwadratu podanégo, iako się má mnogość liczebna ze zbioru iedności liniowych wysokości, przez zbiór iedności liniowych s podstawką, do iedności liczebneý ogólnéy. S kąd wyciągamy tę regułę: że płaszczyna kwadratu iest równą mnogości z wysokości przez podstawek. Ten skrócony w geometryi wyraż nie wytłomaczony dobrze poczynającym, wprawić ich może w barzo przewrotne geometryi rozumienie: wiemy bowiem że linią nie może się mnożyć przez linią, bo w tén działaniu ieden z mnożników byđż koniecznie powinién liczbą oderwaną i ogólną.

W takowém płaszczyn między sobą równaniu i wyrażeniu ich do siebie stófunku przez liczby, czwarty termin wypadá koniecznie s trzech już wiadomych, a zatém z sześciu rzeczy. w skład trójkąta wchodzących trzy tylko są wolné dla naszych przypuszczeń, inne zaś trzy już są wypadkiem koniecznym s piérwizych. I na tén ci to wynaydowaniu trzech rzeczy, z innych trzech podanych zależy cała

Z wymiaru
płaszczyn wy-
padá potrzeba
trygonome-
tryi, i linii w-
niey używa-
nych.

całą sztuką rachowania trójkątów, którą *Trygonometrią* nazwano, a która jest tylko prostym rachunkiem arytmetycznym do geometrii sfórowanym. Idzie więc w trygonometrii o porównanie sześciu rzeczy między sobą, i wyciągnięcie przez nie trzech niewiadomych z trzech podanych. Linie proste iakiemi są boki trójkąta potrafiemy dobrze między sobą równać, i sfórować: ale iakże sfórować kąty z liniami? Geometrowie obrali sobie obwód koła do wymiaru kątów, lecz nie mając dokładnego sfófunku między linią prostą i krzywą, nie można było boków równać z łukami zamykającemi kąty. Trzeba im więc było powymyślać inne linie proste znaczące łuki koła, i kąty, z których wielkości można by przyiść do wielkości kątów.

Fig. 1.

Wziąwszy sobie na figurze 1. łuk DB mierzący kąt ACB; linie proste oznaczające ten łuk są: pionową AB która się nazywa Wstawą łuku DB lub kąta ACB (*Sinus arcus vel anguli*); DA Wstawą odwróconą (*Sinus versus*); ED Styczną (*Tangens*); EC Sieczną tego samego łuku lub kąta (*Secans*). Aże z wiadomości łuku DB wypada wiadomość łuku BG który jest jego dopełnieniem, więc i linie dopiero wymienione odkryć nam zaraz powinny podobne linie służące łukowi BG, albo że iasniey powiem, linie łuku DB mieć powinny inne odpowiadające sobie w łuku BG: iakoż $BH = AC$ która jest wstawą łuku BG, nazywa się Dostawą łuku DB (*Cofinus arcus*); $HC = BA$ która jest wstawą DB nazywa się Dostawą BG; GH która jest Wstawą odwróconą BG, zowie się Dostawą odwróconą DB (*Cofinus versus*) FG, która jest Styczną BG, zowie się Dostyczną DB (*cotangens*); Sieczną nakoniec FC łuku BG, jest Dofieczną łuku DB (*Cofecans*); i tak co się w jednym łuku zowie Wstawą, Styczną, Sieczną, i t. d. to w jego dopełnieniu nazywa się Dostawą, Dostyczną, Dofieczną, i t. d. Wszystkie te linie iak widzimy, są liniami prostymi i funkcyami promienia, który będąc

największą wstawą łuku 90° , ma imię *Wstawy Prostey* (*Sinus rectus*). Naznaczywszy takim sposobem linie wyrażające łuki, potrzeba ie było przywieść do iedney powszechney miary porównywaną, to iest wyrazić ie w cząstkach promienia DC : oprócz tego znależdź stółunek między niemi wszystkiemi, za którego pomocą mając n.p. wstawy, moglibyśmy przyść do odkrycia dostaw, stycznych, dostycznych, siecznych, doiecznych i t. d. potrzeba ieszcze było znać przynajmniey, iedną takową linią w cząstkach promienia, a dopiero od tey wiadomey przyść do wszystkich odpowiadających łuków, poczawszy od najmnieyszego aż do największych. To ostatecznie zadanie rozwiązuie nam geometrya: ieżeli bowiem wstawa iest połową cięciwy, cięciwa zaś łuku 60° iest równa promieniowi, więc wstawa łuku 30° iest połową promienia. Jakimżeby sposobem od wstawy łuku 30° wiadomey przyść do wstaw inaych iakichkolwiek łuków? oto gdybyśmy mieli sposób s wstawy iakiego łuku, wynalezienia wstawy łuku podwójnego, iego połowy, powtóre z dwóch łuków poiedynaczych wstawę ich summy lub różnicy; mielibyśmy zaraz wstawę łuków 15° , $7^\circ + 30^\circ$, 45° , i innych. Te wszystkie uwagi pokazują nam że do wynalezienia linii wspomnionych które *trygonometrycznemi* nazwano, na wszystkie łuki koła, rozwiązać nam potrzeba następujące zadania:

Pierwsze: wynależdź związek zachodzący między wszystkiemi liniami trygonometrycznemi,

Drugie: mając wstawy poiedyncze dwóch łuków, wynależdź wstawę ich summy i różnicy.

Trzecie: mając wstawę iakiego łuku, wynależdź wstawę łuku podwójnego i tego połowy.

Nim przystąpiemy do rozwiązywania tych zadań, zgodziemy się dla więkzhey wygody w rachunku, promień koła, który iest zawsze ilością staieczną, wziąć za iedność; wszystkie więc wstawy łuków iakichkolwiek, wyiawszy łuk 90° , będą ułomkami.

Pierwsze zadanie rozwiążmy nam proporcye z geometryi wyjęte, a przez algebraiczne zrównania wyrażone, dla czego łuk iakikolwiek DB, nazwiemy p ; będzie więc $BG=90^\circ-p$ dla krótkości. zaś użyjemy następujących wyrazów: *wst.p*, znaczyć będzie, *wstawa łuku albo kąta p*, podobnie:

Dofst. p. znaczy Dofstawa łuku lub kąta p . (*Cofinus arcus p*).

Sty. p. Styczna łuku lub kąta p . (*Tangens arcus p*).

Dofsty. p. Dofstyczna p . - - - (*Cotangens p*).

Siec. p. Sieczna łuku lub kąta p . (*Secans arc. p*).

Dofie. p. Dofieczna łuku lub ką. p . (*Cofeatus ar. p*).

Wst. odwr. p. Wstawa odwrócona (*Sinus versus*).

Dofst. odwr. p. Dofstawa odwrócona (*Cofinus versus*).

Ł. Wst. k. Łuk który ma za *wstawę k*. (*Arcus cuius finus k*).

Ł. Dofst. k. Łuk który ma za *Dofstawę k*. (*Arcus cuius cofinus k*). i t. d.

a náprzód chcąc wynaleśdź związek między *wstawą* i *dofstawą*, to iest między AB , i $AC=BH$ mamy pcdług prop. 47. i. Xiegi Euklidesa następujące zrównanie $(BC)^2=(AB)^2+(AC)^2$, czyli $1=(wst.p)^2+(Dofst.p)^2$, a przeto $Dofst.p=\sqrt{1-(wst.p)^2}$. Inne zrównania wyciągniemy s podobieństwa troykatów, znacząc ie przez (\cup): i tak troykat $EDC \cup \triangle BAC \cup \triangle FCG \cup \triangle BCH$, które dają następujące proporcye.

$CA:DC::AB:ED$ to iest $dofst.p:1::wst.p:sty.p$, s ką

$$sty.p = \frac{wst.p}{dofst.p}$$

$ED:DC::GC:GF$ - - - $sty.p:1::1:dofsty.p$, s ką

$$dofsty.p = \frac{1}{sty.p}$$

$AC:BC::DC:EC$ - - - $dofst.p:1::1:siec.p$, s ką

$$siec.p = \frac{1}{dofst.p}$$

HC:

$HC:BC::GC:FC$ - - - wst. p. 1:1:1:1 doste. p. s kąd

$$\text{dost. p.} = \frac{1}{\text{wst. p.}}$$

te zrównania dają nam związek między wszystkimi liniami trygonometrycznymi i rozwiążą pierwsze zadanie.

Co do drugiego: niech będzie na Fig. 2. łuk $KB=x$, którego wstawa KL , dostawa LG , łuk $BA=y$, którego wstawa BD , dostawa GD ; potrzeba nam wynaleść łuku $KA=x+y$ wstawę KM , i dostawę GM ; poprowadziwszy LO , $LP=MO$, do złożenia trójkątów podobnych GBD , GLP , tak aby w ich skład wchodziły linie wiadome, będzie wstawa której szukamy $KM=KO+OM$; wypadą nam naprzód: $GB:GL::BD:LP=OM$, to jest 1: $\text{dost. } x:: \text{wst. } y: OM = \text{wst. } y, \text{ dost. } x$ powtóre $\triangle GBD \cap KLO$ daje następującą proporcję:

$GB:GD::KL:KO$ to jest, 1: $\text{Dost. } y:: \text{wst. } x: KO = \text{wst. } x, \text{ dost. } y$; $KO+OM = \text{wst. } (x+y) = \text{wst. } x \text{ dost. } y + \text{Dost. } x$ (1).

Chcąc zaś wynaleść GM czyli $\text{dost. } (x+y)$, mamy naprzód $GB:GD::GL:GP$ to jest, 1: $\text{dost. } y:: \text{dost. } x: GP = \text{dost. } x \text{ Dost. } y$. Powtóre: $GB:GD::KL:LO$ to jest, 1: $\text{wst. } y:: \text{wst. } x: LO = \text{wst. } x, \text{ wst. } y$ więc $GM=GP-LO = \text{dost. } (x+y) = \text{dost. } x \text{ dost. } y - \text{wst. } x, \text{ wst. } y$. (2)

Drugą część tego samego zadania chcąc rozwiązać, nazwiemy na Fig. 3. $KB(x)$, $BA(y)$ s których wstaw i dostaw pojedynczych KL , GE , BD , GD , potrzeba nam wynaleść wstawę i dostawę łuku $KB-BA=x-y$. Poprowadziwszy MO , PL , LO , dla złożenia trójkątów podobnych z linii znanych, naprzód $\triangle GBD \cap \triangle GLP$, a przeto:

$GB:GL::BD:LP=OM$ to jest, 1: $\text{dost. } x:: \text{wst. } y: OM = \text{wst. } y \text{ dost. } x$. Powtóre $\triangle KOL \cap \triangle GBD$, więc $GB:GD::KL:KO$ to jest, 1: $\text{dost. } y:: \text{wst. } x: KO = \text{wst. } x, \text{ dost. } y$, s kąd $KM=KO-OM = \text{wst. } (x-y) = \text{wst. } x, \text{ dost. } y - \text{dost. } x \text{ wst. } y$ (3)

S2

Na

Na wyznaczenie: zaś $GM = \text{dof.}(x-y)$ mamy na-
przód $GB:GD::GL:GP$ to jest 1: $\text{dof. } y::\text{dof. } x: GP =$
 $\text{dof. } x. \text{dof. } y$. Powtóre,
 $GB:BD::KL:OL$ to jest 1: $\text{wst. } y::\text{wst. } x: OL = \text{wst. } y.$
 $\text{wst. } x$, z czego otrzymujemy $\text{dof.}(x-y) = \text{dof. } x.$
 $\text{dof. } y + \text{wst. } x \text{ wst. } y$. (4).

wynaleźliśmy więc cztery równania:

- (1) $\text{wst.}(x+y) = \text{wst. } x. \text{dof. } y + \text{dof. } x. \text{wst. } y$
- (2) $\text{dof.}(x+y) = \text{dof. } x. \text{dof. } y - \text{wst. } x. \text{wst. } y$ (α).
- (3) $\text{wst.}(x-y) = \text{wst. } x. \text{dof. } y - \text{dof. } x. \text{wst. } y$
- (4) $\text{dof.}(x-y) = \text{dof. } x. \text{dof. } y + \text{wst. } x. \text{wst. } y$

Dodawszy równania (1) z (3), i znowu odciąg-
wizy tę samą od siebie, otrzymamy inne cztery.

- (1) 2. $\text{wst. } x. \text{dof. } y = \text{wst.}(x+y) + \text{wst.}(x-y)$,
- (2) 2. $\text{dof. } x. \text{dof. } y = \text{dof.}(x+y) + \text{dof.}(x-y)$, (β)
- (3) 2. $\text{dof. } x. \text{wst. } y = \text{wst.}(x+y) - \text{wst.}(x-y)$,
- (4) 2. $\text{wst. } x. \text{wst. } y = \text{dof.}(x-y) - \text{dof.}(x+y)$.

uczyniwszy w równaniach (α) $x=y$, pierwsze dwa
równania dają nam:

$\text{Wst. } 2y = 2$; $\text{wst. } y, \text{dof. } y, - \text{Dof. } 2y = (\text{dof. } y)^2 - (\text{wst. } y)^2$
ostat. zaś dwa: $\text{wst. } 0 = 0, \text{dof. } 0 = (\text{dof. } y)^2 + (\text{wst. } y)^2 = 1$.
to jest: że wstawia łuku zero równa jest zero; dostá-
wa zaś łuku zero równa jest promieniowi koła, co
nam właśnie sama figura pierwsza okazuje. Tę sa-
mą wartość wprowadziwszy w równanie (β) -

$x=y=\frac{1}{2}a$, pamiętając o dopiero wyciągniętych zró-
wnaniach, otrzymamy z (2) i (4)

$$\text{Wst. } \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1-\text{dof. } a}{2}\right)}; \text{Dof. } \frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{1+\text{Dof. } a}{2}\right)}$$

Dwa te równania wyrażają wstawę i dostawę po-
łowy łuku przez wstawę i dostawę łuku całkiego,
tak jako pierwsze dwa wstawę i dostawę łuków
podwójnych przez wstawę i dostawę łuków poie-
dynczych, przeto obydwa rozwiązuja zadanie trze-
cie. Każdy z nas łatwo poymie, jakim sposobem
mając wiadomą wstawę łuku 30° , i równania z ro-
związania trzech zadań wypadie, rachowane s tąd
bydź

bydź mogą wstawy i dostawy łuków innych.

Iakośmy zaś z równań (a) potrafili wyciągnąć wstawy łuków podwójnych uczyniwszy $x=y$, tak w tychże samych kładąc za $x=2y$, $x=3y$, $x=4y$ następnie, i zamieniając wstawy łuków podwójnych, potrójnych i t. d. za ich wartości w łukach pojedynczych, otrzymamy podobnie:

$$Wst. 3y = 3 \cdot wst. y (dost. y)^2 - (wst. y)^3$$

$$Dost. 3y = (dost. y)^3 - 3 dost. y (wst. y)^2 \text{ i t. d.}$$

położywszy teraz $wst. x = p$, $dost. x = q$, $wst. y = m$, $dost. y = n$ i dwa równania $p^2 + q^2 = 1$, $m^2 + n^2 = 1$, używając do zamián, otrzymamy:

$$Wst. x = p.$$

$$wst. (y+x) = mq + np.$$

$$wst. (2y+x) = 2n(mq + np) - p.$$

$$wst. (3y+x) = 2n[2mnq + 2n^2p - p] - mq - np.$$

i t. d.

to jest:

$$Wst. x = wst. x$$

$$wst. (y+x) = wst. y \cdot dost. x + dost. y \cdot wst. x$$

$$wst. (2y+x) = 2 dost. y \cdot wst. (y+x) - wst. x$$

$$wst. (3y+x) = 2 dost. y \cdot wst. (2y+x) - wst. (y+x)$$

$$wst. (4y+x) = 2 dost. y \cdot wst. (3y+x) - wst. (2y+x)$$

$$wst. (ny+x) = 2 dost. y \cdot wst. [(n-1)y+x] - wst. [(n-2)y+x]$$

to samo i na dostawy.

$$Dost. x = q$$

$$dost. (y+x) = nq - mp.$$

$$dost. (2y+x) = 2n(nq - mp) - q$$

$$dost. (3y+x) = 2n(2n^2 - 2mnp - q) - nq + mp$$

i t. d.

to jest:

$$Dost. x = dost. x$$

$$dost. (y+x) = dost. y \cdot dost. x - wst. y \cdot wst. x$$

$$dost. (2y+x) = 2 dost. y \cdot dost. (y+x) - dost. x$$

$$dost. (3y+x) = 2 dost. y \cdot dost. (2y+x) - dost. (y+x)$$

$$dost. (4y+x) = 2 dost. y \cdot dost. (3y+x) - dost. (2y+x)$$

$$dost. (ny+x) = 2 dost. y \cdot dost. [(n-1)y+x] - dost. [(n-2)y+x].$$

gdzie widzimy, że kiedy łuki idą w postępie arytmetycznym

S₃

tycznym

stycznym ich wstawy i dostawy mają postępowanie zwrotne, jakiby wypadł z odwikłania ułamku mającego za mianownika $1 - 2nx + (m^2 + n^2)x^2$ podług §. 32.

S tych ostatnich równań uczyniwszy $x=y$ wnoszą się inne wielkiego w rachunku matematycznym używania, to jest:

$$\text{Wst. } 2y = 2 \text{ wst. } y. \text{ dost. } y \quad (x)$$

$$\text{wst. } 3y = 2 \text{ dost. } y. \text{ wst. } 2y - \text{wst. } y$$

$$\text{wst. } 4y = 2 \text{ dost. } y. \text{ wst. } 3y - \text{wst. } 2y$$

$$\text{wst. } 5y = 2 \text{ dost. } y. \text{ wst. } 4y - \text{wst. } 3y$$

$$\text{wst. } ny = 2 \text{ dost. } y. \text{ wst. } (n-1)y - \text{wst. } (n-2)y$$

$$\text{dost. } 3y = 2 \text{ dost. } y. \text{ dost. } 2y - \text{dost. } y$$

$$\text{dost. } 4y = 2 \text{ dost. } y. \text{ dost. } 3y - \text{dost. } 2y$$

$$\text{dost. } 5y = 2 \text{ dost. } y. \text{ dost. } 4y - \text{dost. } 3y$$

i t. d.

$$\text{dost. } ny = 2 \text{ dost. } y. \text{ dost. } (n-1)y - \text{dost. } (n-2)y.$$

§. LII.

Linie trygonometryczne do danych i odciętych

Ponieważ zamierzaliśmy sobie rachunek algebracyjny w trygonometrię wprowadzić, i za pomocą jego tę naukę dalej rościagnąć, potrzeba nam pamiętać na nasze początki w I. Części rzucane, że ilości iakićkolwiek cechowane znakami ogólnymi należy uważać nie tylko przez wzgląd na ich wielkość, ale nawet przez wzgląd na ich stan, w którym się znajdują. Należy nam przeto nauczyć się w liniach trygonometrycznych użycia znaków dodatnich i ujemnych. Czego chcąc doświadczyć przez proste geometryczne uwagi, rzucmy okiem na Fig. 1. i ścigając różne odmiany łuku DB, a z nim odmiany wstaw, dostaw, stycznych, dostycznych i t. d. znajdziemy, że kiedy łuk rośnie, jego wstawa i styczná powiększają się, dostawa zaś i dostyczna ubywa; doszedłszy 90° , wstawa stała się największą, czyli równą promieniowi, a dostawa zero; w tym samym przypadku styczná stała się równoległą do sięczną, czyli nieskończoną wielkością, a dostyczna zero. Kiedy łuk przebieżył 90° znówu rośnie, ie-

go wstawia i styczna ubywa, a dostawa zaczyna rosnąć. Ale że dostawa była dopiero zero, styczna zaś $\frac{1}{2}$, to jest przeszły za granicę ostatnią wzrostu i ubywania: powiedzieliśmy zaś w §. 16. że ilość iaką skończoną przeszedłszy za 0, albo $\frac{1}{2}$, odmienną swóy stała i stała się z dodatney odmienną lub przeciwnie. więc wszystkie dostawy i styczne łuków większych od 90° czyli kątów rozwartych są odmiennymi. Idąc dalej za wzrostami łuku znajdziemy, że kiedy ten będzie 180° na ten czas wstawia $=0$, dostawa równa promieniowi odmiennemu, to jest, nazwawszy połowę obwodu koła P , wst. $P=0$, dost. $P=-r$. Przechodząc za połowę obwodu wstawy zaczynają rosnąć i być odmiennymi, a dostawy w tymże samym stanie ubywają, i doszedłszy $\frac{3}{2}P$ czyli do M , dostawy stały się znowu zero, a wstawy równe promieniowi odmiennemu. Od M naostatek idąc do D , dostawy rosną, ale przeszedłszy za zero stały się znowu dodatne, a wstawy odmienné aż do D , póki znowu nie przejdą powtórnie za granicę swego wzrostu i ubywania. S tych więc uwag wypada, że wstawy łuków w pierwszej i drugiej ćwierci koła są dodatne, w trzeciej zaś i czwartej odmienné; dostawy w pierwszej i czwartej ćwierci koła są dodatne, w drugiej i trzeciej odmienné: to jest, że średnica DL przedziela wstawy dodatne, które leżą nad nią; i odmienné które się pod nią znajdują: średnica zaś GM oddziela dostawy dodatne, które są położone na lewey, od odmiennych które są na prawey iey storonie. A ponieważ $stycz.p = \frac{wst.p}{dost.p}$; $dostycz.p =$

$\frac{1}{stycz.p}$, $stycz.p = \frac{1}{dost.p}$, $dostycz.p = \frac{1}{wst.p}$; idzie za tém że styczne są w ten czas dodatne kiedy wstawy i dostawy razem dodatne, albo razem odmienné, co má miejsce w pierwszej i trzeciej ćwierci koła: są zaś odmienné w drugiej koła drugiej i czwartej ponie-

Waż tam wstawy i dostawy mają znaki różne. Dostyczne iako pokazuje ich zrównanie właśnie się tak mają iako i styczne, to jest króćcy mówiaci: że styczne i dostyczne są w ćwierciach koła liczby nieparzyste dodatnie, w ćwierciach zaś liczby parzyste odjemne.

Sieczne łuków podług zrównania tak się mają iako ich dostawy, dosteczne zaś iako wstawy, to jest: że sieczne w drugiey i trzeciey ćwierci koła są odjemne, w pierwszej i czwartej dodatne; dosteczne zaś w pierwszej i drugiey ćwierci dodatne, a w trzeciey i czwartej odjemne. S tych uwag wypadaia nam náprzód zrównania. $Wst. 0 = 0$, $dost. 0 = 1$;

$wst. \frac{1}{2}P = 1$, $dost. \frac{1}{2}P = 0$, $wst. P = 0$, $dost. P = -1$,
 $wst. \frac{3}{2}P = -1$, $dost. \frac{3}{2}P = 0$, $wst. 2P = 0$, $dost. 2P = 1$.

Kombinując zrównania, terazniéysze z (α), to jest,

Linii kaźdey
trygonometry
czney odpo-
wiadá nieskoń-
czoną liczbą
łuków.

kładąc w te ostatnie za x łuki $\frac{1}{2}P$, P , $\frac{3}{2}P$, $2P$, i t. d. otrzymamy następujące prawdy.

$wst. (\frac{1}{2}P + y) = + dost. y$ - - - $wst. (\frac{1}{2}P - y) = + dost. y$.

$dost. (\frac{1}{2}P + y) = - wst. y$ - - - $dost. (\frac{1}{2}P - y) = + wst. y$.

$wst. (P + y) = - wst. y$ - - - $wst. (P - y) = + wst. y$

$dost. (P + y) = - dost. y$ - - - $dost. (P - y) = - dost. y$ (γ)

$wst. (\frac{3}{2}P + y) = - dost. y$ - - - $wst. (\frac{3}{2}P - y) = - dost. y$

$dost. (\frac{3}{2}P + y) = + wst. y$ - - - $dost. (\frac{3}{2}P - y) = - wst. y$

$wst. (2P + y) = + wst. y$ - - - $wst. (2P - y) = - wst. y$

$dost. (2P + y) = + dost. y$ - - - $dost. (2P - y) = + dost. y$

powtarzając ieszcze więcéy razy obwód koła rościąglibyśmy dałey liczbę tych zrównań, s których kaźde jest twierdzeniem geometryczném. Przypatrzmywż się zaś z uwagą wszystkim; widzemy że kilka łuków między sobą różnych mają té same wstawy i dostawy, co nam także figura 4. pokazuje. Wiemy bowiem, że cięciwa w kole náleży do tych wszystkich łuków, które się kończą na iey przecięciach s kołem; i tak AC náleży równie do łuku ABC , do łuku ADC

i do

Figura 4.

i do wszystkich innych łuków, które obrotem swoim opiszę w następujący sposób: wziąwszy n. p. koniec cięciwy A , i tocząc ją około drugiego końca C , ta cięciwa wrociwszy się na swe miejsce, będzie należyć do łuku ABC , i do całego obwodu koła który obie-
gła, tak dalece, że nazwawszy ABC, u , tocząc cięciwę tylé razy, ile nam się podobá i wróciąc ją na swoje miejsce, wszystkie łuki, które opiszę swym biegiem, będą do niej należyć, to jest łuki $u, u+P', u+2P', u+3P', u+4P'$, i t. d. (tu bierzemy P' za cały obwód koła), toż samo mówić o łuku $ADC=P'-u$, s którym podobne dział się będą odmiany za biegiem cięciwy, tak dalece, że znowu ta sama cięciwa będzie należyć do łuków $P'-u, 2P'-u, 3P'-u, 4P'-u$, i t. d. Ale że ta cięciwa przechodząc przez łuki $u, P'-u$, raz niknie, drugi raz znowu rośnie; idzie, za tém że między temi łukami jedné będą, których cięciwa AC jest dodatná; a drugié, których jest odjemná podług §. 16. to jest uważając ten bieg iakośmy go uważali w stawach i dostawach, do cięciwy dodatnéj będą należyć łuki

$$u; u+2P'; u+4P' \dots u+2nP' \dots \\ P'-u; 3P'-u, 5P'-u \dots (2n+1)P'-u.$$

Do cięciwy zaś odjemnéj łuki.

$$u+P'; u+3P'; u+5P' \dots u+(2n+1)P' \dots \\ 2P'-u; 4P'-u; 6P'-u \dots 2nP'-u$$

to jest że do łuków ABC, ADC , przydając iakąkolwiek liczbę parzystą obwodów koła, wszystkie te łuki będą miały cięciwę AC dodatną; przydając zaś do tychże samych łuków liczbę obwodów koła nie parzystą, wszystkie będą miały cięciwę AC odjemną. Każdą więc cięciwa należy do nieskończonej liczby łuków, a przeto i wstawy które są połowami cięciw; dostawy, styczne, doścyczne, i t. d. które są funkcjami pierwszych, mają także nieskończoną liczbę łuków, do których należą. Ta więc liczba łuków odpowiadająca jednéj linii trygonometrycznéj nie może być w zrównaniu algebraiczném zawarta;

to jest że łuki są funkcyami przestępnemi tych wstaw, dostaw i t. d. Mając więc podane zrównanie n. p. $wst. z = A$, a chcąc z niego wyciągnąć łuk z , otrzymamy $z = L. Wst. A$, to jest że z jest równe łukowi, którego wstawa A . Tu naprzód widzimy, iż działanie którego na rozwiązanie takowego zrównania używamy, jest całé różné od tych, któreśmy w I. Części uważali. Oprócz tego tak rozwiązane zrównanie iefzcze nas nic oznaczonego nie uczy: ieżeli bowiem wstawa A mieć może nieskończoną liczbę łuków przydając tylé razy obwód koła, ile nam się podobá; z má nieskończenie wiele wartości, między którymi iedné mogą należeć do naszego pytania i iego warunków, á drugié nie: sposobu zaś rozróżnienia takowych wartości naszemu pytaniu właściwych łub obcych, zrównanie nas nie uczy. I na tę to tak wielką trudność natrasiać zwykliśmy náyczęściej w rachunkach astronomicznych, które poty nie rozwiązują pytania, póki przez jaką kombinacyą nie wyrzucemy terminu zamykającego łuki. Sposóbu tego nie przypadá nam tu iefzcze ślómaczyć; dośyć nam będzie wśyfstkie pomocy do tego rachunku wyłożyć i nauczyć się w rachunku trygonometrycznym iedné wyrazy zamieniać za drugie.

§. LIII.

Sposób zanie-
niania mnogo-
ści i potęg w
liniach trygo-
nometry-
cznych.

Pierwszą trudność którą tu ułatwić powinniśmy, pochodzi z różnych potęg i mnogości linii trygonometrycznych czyniących zrównania ciężkiemi do rozwiązania, albo przynajmniéj znacznie zawikłanemi. Na tén koniec wróćmy się do zrównań (3), s których (1) i (3) zamykające mnogość wstawy przez dostawę, odmieniemy na prościéysze, uczyniwszy w nich $x = ny$, będzie bowiem

(1) - - $z wst. ny. dost. y = wst. (n+1)y + wst. (n-1)y. (A)$
(2) - - $z dost. ny. wst. y = wst. (n+1)y - wst. (n-1)y$
dwa té zrównania służyć nam zawsze mogą za wzory do wyrażenia mnogości s wstaw przez dostawy łuków kilkokrotnie powtórzonych, przez samé wsta-
wy

wy tychże łuków kilkokrotnych. Czego użycie zaraz nam się pokáže, wzięwszy zrównania (2) i (4) z (3) i w tém ostatniem uczyniwszy $x=y$, będzie

$$2(wst.y)^2 = 1 - doft.2y.$$

mnożąc obydwie członki przez $wst.y$, wypadnie $2(wst.y)^3 = wst.y - wst.y \cdot doft.2y$, które za pomocą zrównania (2) z (A) przerobiemy na

$4.(wst.y)^3 = 3wst.y - wst.3y$. Podobnym sposobem mnożąc ciągle tak przerobione potęgi przez wstawy, i kładąc za mnogości ich wartość w łukach prostych z (A), przyjdziemy do przerobienia wszystkich potęg wstaw, przez wstawy łuków kilkokrotnych; iak nam następujące pokazują zrównania:

$$2(wst.y)^2 = 1 - doft.2y.$$

$$4.(wst.y)^3 = 3wst.y - wst.3y$$

$$8(wst.y)^4 = 3 - 4doft.2y + doft.4y. \quad (1)$$

$$16(wst.y)^5 = 10wst.y - 5wst.3y + wst.5y$$

$$32(wst.y)^6 = 10 - 15doft.2y + 6doft.4y - doft.6y$$

$$64(wst.y)^7 = 35wst.y - 21wst.3y + 7wst.5y - wst.7y$$

i t. d.

wzięwszy zaś zrównanie (2) z (3) i z niem podobnie postępując przez użycie zrównania (1) z (A), przyjdziemy do wyrażenia wszystkich potęg dostaw, przez dostawy łuków prostych kilkokrotnie powtórzonych to jest:

$$2(doft.y)^2 = 1 + doft.2y,$$

$$4.(doft.y)^3 = 3doft.y + doft.3y,$$

$$8(doft.y)^4 = 3 + 4doft.2y + doft.4y, \quad (2)$$

$$16.(doft.y)^5 = 10doft.y + 5doft.3y + doft.5y.$$

$$32(doft.y)^6 = 10 + 15doft.2y + 6doft.4y + doft.6y$$

$$64(doft.y)^7 = 35doft.y + 21doft.3y + 7doft.5y + doft.7y.$$

i t. d.

w tych zamianach współczynniki postępują tym prawem co i w potędze dwó-wyrazowej. Wszystkie te zrównania będą nam bardzo pożyteczne w wyższych rachunkach.

§. LIV.

Tłómaczy się
sposób rachowania
tablic
wstaw, dostaw
i t. d.

Potęgi iefzcze wstaw i dostaw uroionych wyraża-
ia się prościey, i prowadzą nas do barzo ważnych
wypadków. Weźmy zrównanie nąypierwéy wycią-
gnione $(wst.y)^2 + (doft.y)^2 = 1$. którego pierwfzy czło-
nek rozebrawfzy na mnożników, znaydziemy
 $(doft.y + \sqrt{-1.wst.y})(doft.y - \sqrt{-1.wst.y}) = 1$, a przy-
brawfzy drugi łuk z wypadnie nam z rachunku
 $(doft.y + \sqrt{-1.wst.y})(doft.z + \sqrt{-1.wst.z}) = doft.(z+y)$
 $+ \sqrt{-1.wst.(z+y)}$
 $(doft.y - \sqrt{-1.wst.y})(doft.z - \sqrt{-1.wst.z}) = doft.(z+y)$
 $- \sqrt{-1.wst.(z+y)}$
 $(doft.x \pm \sqrt{-1.wst.x})(doft.z \pm \sqrt{-1.wst.z})(doft.y \pm \sqrt{-1.wst.y}) = doft.(x+z+y) \pm \sqrt{-1.wst.(x+z+y)}$.
uczyniwfzy w pierwfzych $y=z$, w ostatniém $x=y$
 $=z$, otrzymamy:

$$(doft.z \pm \sqrt{-1.wst.z})^2 = doft.zz \pm \sqrt{-1.wst.zz}$$

$$(doft.z \pm \sqrt{-1.wst.z})^3 = doft.z^3 \pm \sqrt{-1.wst.z^3}$$

i ogólnie

$$(doft.z + \sqrt{-1.wst.z})^n = doft.nz + \sqrt{-1.wst.nz}$$

$$(doft.z - \sqrt{-1.wst.z})^n = doft.nz - \sqrt{-1.wst.nz} \quad (\lambda)$$

dodając i odciażając dwa té ostatnie zrównania od
siebie, wypadnie:

$$2. doft. nz = (doft.z + \sqrt{-1.wst.z})^n + (doft.z - \sqrt{-1.wst.z})^n$$

$$2\sqrt{-1.wst.nz} = (doft.z + \sqrt{-1.wst.z})^n - (doft.z - \sqrt{-1.wst.z})^n$$

té ostatnie ogólne zrównania, równie iak poprzedza-
jące uczą nas, że chcąc kąt lub łuk iaki podzielić na
części, i s tego podziału iakąkolwiek część wyrazić
przez łuk całki, wyraż takowy i rozdzielenie kąta
zawisło od zrównania stopnia, którego wykładnikiem
iést liczba podziału; i tak rościęcie łuku lub kąta na
trzy, cztery, pięć m części, i wyrażenie $zcięty$, $4cięty$,
 $5cięty$, $mcięty$ części łuku, przez łuk całki, zawisło od
zrównania stopnia $3go$, $4go$, $5go$, mgo . Cośmy iuż
także znaleźli wyrażając połowę łuku przez łuk cał-
ki. S tad łatwo iést zrozumieć owo wielkie u Sta-
rożytności zadanie o potroieniu kątu (*Problema trise-*
ctionis anguli), które że zależy od zrównania $3go$
stopnia,

stopnia, a co jedno u dawnych Geometrów znaczyło, od wynalezienia dwóch średnich proporcjonalnych; nie dziwno, że ie próżno dawni Geometrowie usiłowali rozwiązać.

W ostatnich zrównaniach drugie członki rozebraliśmy na szereg nieskończony za pomocą wzoru Newtona, otrzymamy:

$$\text{Dofł. } nz = (\text{dofł. } z)^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (\text{dofł. } z)^{n-2} (\text{wfl. } z)^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\text{dofł. } z)^{n-4} (\text{wfl. } z)^4$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (\text{dofł. } z)^{n-6}.$$

$$(\text{wfl. } z)^6 + \text{i t. d.}$$

$$\text{Wfl. } nz = n \cdot (\text{dofł. } z)^{n-1} \text{wfl. } z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\text{dofł. } z)^{n-3}$$

$$(\text{wfl. } z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\text{dofł. } z)^{n-5}$$

$$(\text{wfl. } z)^5 - \text{i t. d.}$$

s których pierwsze zamykają w drugim członku terminy liczby nieparzystej; drugie, terminy liczby parzystej potęgi n funkcji dwó-wyrazowej.

Wziąwszy teraz za z luk nieskończenie mały zrównać go możemy s fwą wstawą, będzie więc $\text{wfl. } z = z$; $\text{dofł. } z = 1$; powtóre, wziąwszy n za liczbę nieskończenie wielką, będzie nz liczbą skończoną, którą nazwiemy u ; a przeto $\text{wfl. } z = z = \frac{u}{n}$; te wartości wkładając w zrównania poprzedzające, wypadnie:

$$\text{Dofł. } u = 1 - \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{u^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} +$$

$$\frac{u^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} - \text{i t. d.}$$

(φ)

Wfl.

$$Wst. u = u - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{u^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{u^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{u^9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} - \text{i t. d.}$$

które nam wyrażają wstawy przez łuki w szeregach barzo malejących, i służą do rachowania tablic wstaw, dostaw, i t. d. Przypuśćmy n. p. że u ma się do ćwierci koła czyli łuku 90° , iako m do n , to jest $u = \frac{mP}{2n}$; ponieważ geometrya nas uczy, że pół

obwodu koła którego promień $= 1$, wyraża się w częściach tegoż promienia $3,14159265358 = P$, będzie

$$\begin{aligned} Wst. L. \frac{m}{n} 90^\circ &= \frac{m}{n} \cdot 1,57079632679 \\ &- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0,64596409750 \\ &+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0,07969262624 \\ &- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0,00468175413 \\ &+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0,00016044118 \\ &\text{i t. d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dost. L. \frac{m}{n} 90^\circ &= 1,000000000000 \\ &- \frac{m^2}{n^2} \cdot 1,23370055013 \\ &+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,25366950790 \\ &- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,02086348076 \\ &+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00091926027 \\ &\text{i t. d.} \end{aligned}$$

łatwość

łatwość tego rachunku zależy od ułamku $\frac{m}{n}$, który

nie może być większy od $\frac{1}{2}$ dla tego, że w rachowaniu wstaw i dostaw nie idziemy tylko do 45° .

Damy że $\frac{m}{n} = \frac{1}{5}$, włożywszy tę wartość ułamku w

wyrazy poprzedzające znajdziemy wstawę łuku $18^\circ = 0,30901699437$ iego zaś dostawę $= 0,95105651629$. Wyjawszy ostatnie figury liczb które będą dla tego różne, żeśmy do pięci tylko terminów szereg ciągnęli. Ponieważ zaś równania (ϕ) wypadły z tego przypuszczenia że v jest łukiem bardzo małym mogącym się zmniejszać s swą wstawą; nie możemy brać za v łuku większego od 30° . Także rachować wstawy i dostawy łuków większych na to podają nam sposób równania z (β) , (1) i (4) , uczyniwszy w nich $x = 30^\circ$, ponieważ $wst. 30^\circ = \frac{1}{2}$, będzie

$$Wst. y = dost. (30^\circ - y) - dost. (30^\circ + y)$$

$$Dost. y = wst. (30^\circ + y) + wst. (30^\circ - y)$$

wiec

$$Wst. (30^\circ + y) = dost. y - wst. (30^\circ - y)$$

$$Dost. (30^\circ + y) = dost. (30^\circ - y) - wst. y$$

za pomocą tych równań można iakichkolwiek łuków rachować wstawy i dostawy.

Od wstaw i dostaw łatwo przychodzemy do styecznych i dostycznych przez równania wyrażające związek między pierwszemi i ostatniemi. Wiemy

Rachunek styecznych i dostycznych.

bowiem że $sty. p = \frac{wst. p}{dost. p}$ a przeto z równań (α)

otrzymamy:

$$Sty. (x+y) = \frac{wst. x. dost. y + dost. x. wst. y}{dost. x. dost. y - wst. x. wst. y}$$

$$Sty. (x-y) = \frac{wst. x. dost. y - dost. x. wst. y}{dost. x. dost. y + wst. x. wst. y}$$

rozdzieliwszy w obydwóch tych równaniach tak licznika iak i mianownika przez $dost. x. dost. y$; wypadnie:

Sty.

$$\begin{aligned} Sty.(x+y) &= \frac{sty.x + sty.y}{1 - sty.x \cdot sty.y} \\ Sty.(x-y) &= \frac{sty.x - sty.y}{1 + sty.x \cdot sty.y} \end{aligned} \quad (\psi).$$

w pierwſzém uczyniwszy $x=y$, znajdziemy:

$$Sty.zy = \frac{2sty.y}{1 - (sty.y)^2} \quad dosty.zy = \frac{dosty.y - sty.y}{2}$$

podobnym ſpoſobem działając w równaniach (β) ,
to ieſt uczyniwszy naſamprzód $x+y=a$, $x-y=b$,
przeto $y = \frac{a-b}{2}$, $x = \frac{a+b}{2}$; wypadną nam náprzód

równania:

$$Wſt.a + wſt.b = 2wſt.\frac{a+b}{2} \cdot doſt.\frac{a-b}{2}$$

$$Doſt.a + doſt.b = 2doſt.\frac{a+b}{2} \cdot doſt.\frac{a-b}{2}$$

$$Wſt.a - wſt.b = 2doſt.\frac{a+b}{2} \cdot wſt.\frac{a-b}{2}$$

$$Doſt.b - doſt.a = 2wſt.\frac{a+b}{2} \cdot wſt.\frac{a-b}{2}$$

które dzieląc przez ſię otrzymamy:

$$\frac{Wſt.a + wſt.b}{Doſt.a + doſt.b} = sty.\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{Wſt.a - wſt.b}{Doſt.b - doſt.a} = dosty.\frac{a+b}{2}$$

$$\frac{Wſt.a - wſt.b}{Doſt.a + doſt.b} = sty.\frac{a-b}{2} \quad (\nu)$$

$$\frac{Wſt.a + wſt.b}{Doſt.b - doſt.a} = dosty.\frac{a-b}{2}$$

§. LV.

Wróćmy się teraz do równań (λ) zawierających wyrazy uroione, a utrzymawszy te same przypuszczenia któreśmy tam uczynili na z , n , biorąc łuk z za nieskończenie mały, a liczbę n za nieskończenie wielką; wypadnie nam $zn=v$, $z=\frac{v}{n}$, wst. $z=z=\frac{v}{n}$.

Zamiana funkcji uroionych za rzeczywiste, i wyrażenie logarytmów przez łuki koła.

doft. $z=1$, a przeto

$$\text{Doft. } v = \frac{\left(1 + \frac{v}{n} \sqrt{-1}\right)^n + \left(1 - \frac{v}{n} \sqrt{-1}\right)^n}{2}$$

$$\text{Wst. } v = \frac{\left(1 + \frac{v}{n} \sqrt{-1}\right)^n - \left(1 - \frac{v}{n} \sqrt{-1}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Dowiedliśmy zaś w nauce o logarytmach hyperbolicznych pod §. 49, że biorąc e za ich grunt,

$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$, czyli kładąc $v\sqrt{-1}$, $-v\sqrt{-1}$ za z ;

$\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{n}\right)^n = e^{v\sqrt{-1}}$, a przeto

$$\text{Doft. } v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}; \text{ Wst. } v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

s kąd $e^{v\sqrt{-1}} = \text{Doft. } v + \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } v$; $e^{-v\sqrt{-1}} = \text{Doft. } v - \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } v$, te równania pokazują nam bardzo bieżącą, omyśł prawdę; że funkcje wykładnicze uroione mają swój wyraz rzetelny przez wstawy i dostawy łuków. Uczynimy znowu teraz n liczbą nieskończenie małą, a g liczbą nieskończenie wielką czy-

li $n = \frac{1}{g}$; będzie doft. $nz = \text{doft. } \frac{z}{g} = 1$; Wst. $nz =$

Wst. $\frac{z}{g} = \frac{z}{g}$, a równania (λ) staną się

T

I=

$$y = \frac{(\text{Doft. } z + \sqrt{-1. \text{wft. } z})^{\frac{x}{2}} + (\text{doft. } z - \sqrt{-1. \text{wft. } z})^{\frac{x}{2}}}{2}$$

$$\frac{z}{g} = \frac{(\text{Doft. } z + \sqrt{-1. \text{wft. } z})^{\frac{x}{2}} - (\text{doft. } z - \sqrt{-1. \text{wft. } z})^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{-1.}}$$

przypomniemy sobie o logarytmach przyrządzonych

w §. 49. że $\log.(1+z) = g(1+z)^{\frac{1}{g}} - g$; a uczyniwszy $1+z=y$; $y^{\frac{1}{g}} = 1 + g \log. y$; te wyrazy wprowadzone w poprzedzające zrównania zamienią się na:

$$1 = \frac{1 + g \log. (\text{doft. } z + \sqrt{-1. \text{wft. } z}) + 1 + g \log. (\text{doft. } z - \sqrt{-1. \text{wft. } z})}{2.}$$

$$\frac{-\sqrt{-1. \text{wft. } z}}{2.}$$

$$\frac{z}{g} = \frac{g \log. (\text{doft. } z + \sqrt{-1. \text{wft. } z}) - g \log. (\text{doft. } z - \sqrt{-1. \text{wft. } z})}{2\sqrt{-1.}} \quad (2)$$

$$\frac{z}{g} = \frac{g \log. (\text{doft. } z + \sqrt{-1. \text{wft. } z}) - g \log. (\text{doft. } z - \sqrt{-1. \text{wft. } z})}{2\sqrt{-1.}}$$

$$\frac{\sqrt{-1. \text{wft. } z}}{2\sqrt{-1.}}$$

zrównanie drugie wyraża się jeszcze tak:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1.}} \log. \frac{\text{Doft. } z + \sqrt{-1. \text{wft. } z}}{\text{doft. } z - \sqrt{-1. \text{wft. } z}}$$

rozdzieliwszy w niem tak licznika jak mianownika przez doft. z, otrzymamy:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1.}} \log. \frac{1 + \sqrt{-1. \text{ft. } z}}{1 - \sqrt{-1. \text{ft. } z}} \quad (3)$$

niech będzie z łukiem, którego styczną = 0, będzie: $2\sqrt{-1.} z = \log. 1$. logarytm więc jedności tyle będzie miał wartości, ile jest łuków mających styczną zero; takich zaś łuków jest nieskończona liczba podług §. 52; bo jeśli P znaczy połowę obwodu koła, łuki

$0, P,$

$0, P, 2P, 3P, 4P, nP$, wszystkie mają styczną zero; a przeto logarytm jedności równy w tém przypuszczeniu, $0, 2PV = 1, 4PV = 1, 6PV = 1, 2nPV = 1$. Ie-
daosé więc má nieskończoną liczbę logarytmów, s
których wszystkie uroione, prócz 0, aże każdá liczba
 B , uważać się może iako $1, B$, a iey logarytm
 $= \log. 1 + \log. B$, idzie za tém że każdá liczba má
nieskończenie wiele logarytmów, s których jeden jest
tylko rzetelny, a wszystkie inne uroione; co nám
daie widzieć w logarytmach drugą własność funkcyi
przestępnych.

Zapatrzywszy się iefzcze na zrównanie (a) i przy-
wiodłszy sobie na pamięć naukę o logarytmach pod

§. 49. przekonamy się, że jeżeli tam $\log. \frac{1+x}{1-x} =$

$$\frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + i \text{ t. d. } \text{położywszy}$$

$x = \sqrt{-1} \text{ sty. } z$; zrównanie (a) rozbierze się na szereg

$$z = \text{sty. } z - \frac{(\text{sty. } z)^3}{3} + \frac{(\text{sty. } z)^5}{5} - \frac{(\text{sty. } z)^7}{7} + i \text{ t. d.}$$

położmy $\text{sty. } z = t$, będzie

$$z = L. \text{sty. } t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - i \text{ t. d.}$$

niech będzie z łukiem 45° , czyli $z = \frac{1}{2}P$, ponieważ
wiemy z geometrii że $\text{sty. } \frac{1}{2}P = 1$; będzie $t = 1$, a przeto
 $\frac{1}{2}P = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + i \text{ t. d.}$

Ten szereg jest sławnym owym wzorem Leibniza,
który on wynalázł na kwadrowanie koła. Z wyżej
podanych o szeregach wiadomości rośladzemy, że
ten wzór na nic nám nie może służyć. Potrzebaby
bowiem dla użycia go, aby przynajmniey było

$t = \frac{1}{10}$, ale ponieważ nie można naznaczyć stofunku

między łukiem którego styczná $\frac{1}{10}$, i między obwodem

T_2 całym

ratym, to przypuszczenie niczego nas nie może nauczyć o wymiarze koła. Należy do tego koniecznie obrać łuk taki, któryby był częścią wielokrotną obwodu, do czego náywygodniejszy w terażniejszym

razie łuk 30° , którego styczná $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ponieważ stycznne innych łuków są barziéj niewymiérne. W tém przypuszczeniu znaydziém:

$$z = \frac{1}{6} P = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{3}} - \text{i t. d. czyli}$$

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \text{i t. d.}$$

s tego ostatniego szeregu z niewypowiedzianą pracą wyciągniono wartość połowy obwodu koła w ułamku dziesiątkowym do 130 przeszło figur, którey liczby początkowe są $P = 3,14159265358979 +$

J.P. Euler szczęśliwie użył wzoru Leibnitza: wzięwszy łuk 45° za z , rozdzielił go na dwa, $a+b=45^\circ$,

$$\text{skąd } \text{sty.}(a+b) = 1 = \frac{\text{sty.}a + \text{sty.}b}{1 - \text{st.}a \cdot \text{sty.}b}, \text{ a przeto}$$

$$\text{sty.}b = \frac{1 - \text{sty.}a}{1 + \text{st.}a \cdot \text{sty.}a}$$

połóży teraz $\text{sty.}a = \frac{1}{2}$, więc $\text{sty.}b = \frac{1}{3}$, a szereg Leibnitza rozebrany na dwie części da wartość $\frac{1}{4}P$ znacznie się zbliżającą do wartości prawdziwey

$$P = 4 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \text{i t. d.} \\ &\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} + \text{i t. d.} \end{aligned} \right.$$

té wszystkie szeregi wypadające z wzoru Leibnitza, odmieniając znaki, przerobić się mogą na ułamki ciągłe podług tego, cośmy wykonali w §. 46. na zrównaniu (e''): i tak sam wzór Leibnitza zamienia się na ten ułamek ciągły:

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}P = \frac{1}{1 + \frac{2 + \frac{2 + \frac{2 + 25}{2 + 49}}{2 + i \text{ t. d.}}}$$

Poznaliśmy w teraźniejszym §, że pierwiastki urojone mają swoje wyrazy rzetelne przez inny rodzaj funkcji: i tak wyraz urojony w logarytmach można za pomocą podanych równań przemienić na wyraz rzetelny w łukach koła; tak dalece, że przechodząc od logarytmów do łuków, i przeciwnie, natrafiamy zawsze na wyrazy urojone. Jeżeli więc w równaniu przestępnym pokaza się pierwiastki urojone, to nie wytykają niepodobieństwa zadania we wszystkich sposobach, ale tylko nas uczą, że rozwiązanie pytania stało się niepodobnem w logarytmach, ale że jest podobnem przez łuki koła; lub przeciwnie, że jest niepodobne w łukach koła, ale podobne w logarytmach. Mamy więc w funkcjach przestępnych sposób przejścia od pierwiastków urojonych do rzetelnych; co funkcjom algebraicznym nie służy, podobno dla tego, że tam działania są te same na jakiegokolwiek funkcji algebraicznych gatunków; tu zaś każdy gatunek funkcji przestępnych ma sobie właściwe działanie w rozwiązaniu równań wchodzących; a zatem jeżeli n.p. pytanie jakie zawisło od łuków koła, sposób obeyścia się z niem przez logarytmy, całe mu nie służy, i czyni się niepodobnem.

§. LVI.

Dotąd odbyliśmy sobie to, co należy do rachunku linii trygonometrycznych zamieniając je jedne za drugie. Zostało nam się zatrzymać nad użyciem tego rachunku w tém, czegośmy przez funkcje algebraiczne nie mogli dokazać. Pamiętamy że w nauce o szeregach na końcu §. 43 rozbiegając ułamki składa-

Przystosowa-
nie poprzedza
jącej nauki do
wynajdowa-
nia mnożni-
ków podwój-
nych funkcji,

né, na ułomki proste wzoru $\frac{A}{1-pz}$ dostrzegliśmy,

że ile razy mianownik składa się z mnożników uroionych, ułomek składany nie może się rozebrać na ułomki mianowników 1go stopnia, żeby te całą funkcją zrobiły uroioną; ale koniecznie w tym przypadku ułomki należy rozbić na inne, których mianowniki są 2go stopnia. $a-bz+cz$ rzetelne, powstałe z dwóch uroionych. Ta uwaga dała nam uczuć potrzebę cechy rozróżniającej funkcją 2go stopnia złożoną z mnożników uroionych, od tej, którą się rodzi z mnożników rzetelnych. Zatrzymamy się teraz nad tem: funkcją iakąkolwiek 2go stopnia wyrazić się może náyogólniej przez $a-bz+cz$; rozbrawszy ją na mnożników, wypadnie:

$$z = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{c} \left[\frac{b^2}{4ca} - 1 \right] \right)}; \text{ żeby } z \text{ było uroio-}$$

ném, i żeby funkcją podaną, miała dwóch uroionych mnożników, potrzeba, podług §. 15. żeby $\frac{b^2}{4ca} < 1$,

czyli żeby $\frac{b}{2\sqrt{ca}} < 1$; wyraziwszy więc $\frac{b}{2\sqrt{ca}}$ przez

ilość iaką mnieyszą od jedności, wyrażemy razem mnożnika uroionego funkcji podanej.

Z wiadomości już wyłożonych w tym rozdziale wiemy, że wstawy i dostawy iakichkolwiek łuków prócz 90° są mnieyszemi od jedności, więc przybra-

wszy łuk p , i za $\frac{b}{2\sqrt{ca}}$ położywszy dostawę tego łuk-

ku, to jest $\frac{b}{2\sqrt{ca}} = \text{Dost. } p$, czyli $b = 2\sqrt{ca} \cdot \text{Dost. } p$;

funkcją podaną zamykającą w sobie takową wartość na b , będzie koniecznie wyrażać mnożników uroionych, z których się składa; to jest: $a-2z\sqrt{ca} \cdot \text{Dost. } p$, $+cz$, będzie wyrazem powszechnym, wszystkich funkcji dwó-kształtnych zamykających mnożniki uroione

ione. Żebyśmy ten wyraz uczynili wygodniejszy, uwolnimy go ze znaku pierwiastkowego, położywszy a^2 za a , c^2 za c , a tak $a^2 - 2acz \cdot \text{Dost. } p + c^2 z^2 = (A')$ będzie wzorem powszechnym funkcji złożonej z dwóch mnożników uroionych.

Chcąc teraz odkryć sposób ogólny rozbięcia iakięskolwiek funkcji na mnożników wzoru (A') , potrzeba nam najprzód wytknąć iakięskolwiek stopnia funkcję złożoną z takowych mnożników, z którą równając wszystkie inne, moglibyśmy się nauczyć, czyli ta zamyka mnożników uroionych lub nie? a dośzedłszy że ich zamyka, żebyśmy mogli wyciągnąć z tego porównywania łuk p , i inne nieoznaczone ilości. Do rozwiązania tej trudności dosyć nam będzie użyć tej samej sztuki, która nam szczęśliwie posłużyła w §. 31. Rozetrwawszy najprzód (A') na swych mnożników, i te potem na zrównanie zamieniwszy, znajdziemy:

$$cz = a(\text{Dost. } p + \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } p); \quad cz = a(\text{Dost. } p - \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } p) \quad (A'')$$

gdzie $a' = \frac{n}{c}$. Teraz niech

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{i t. d.} \quad (B')$$

oznacza funkcję iakąkolwiek, którą chcemy przerościć na funkcję zamykającą mnożniki (A') ; kładę za z, z^2, z^3 , i t. d. wartości z równań (A'') ; za pomocą wzoru ogólnego $(\text{Dost. } p \pm \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } p)^n = \text{Dost. } np \pm \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } np$; otrzymamy dwa następujące zrównania:

$$\begin{aligned} o = & \begin{cases} A + Ba' \text{Dost. } p + Ca'^2 \text{Dost. } 2p + Da'^3 \text{Dost. } 3p + \text{i t. d.} \\ + Ba' \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } p + Ca'^2 \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } 2p + Da'^3 \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } 3p + \text{i t. d.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o = & \begin{cases} A + Ba' \text{Dost. } p + Ca'^2 \text{Dost. } 2p + Da'^3 \text{Dost. } 3p + \text{i t. d.} \\ - Ba' \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } p - Ca'^2 \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } 2p - Da'^3 \sqrt{-1} \cdot \text{Wst. } 3p + \text{i t. d.} \end{cases} \end{aligned}$$

które dodane i odciagnione od siebie rodzą dwa inne:

$$T_4 \quad o = A +$$

$$0 = A + Ba' \text{Dost. } p + Ca'^2 \text{Dost. } 2p + Da'^3 \text{Dost. } 3p + i \text{ t. d.} \quad (B''_1)$$

$$0 = Ba' \text{Wst. } p + Ca'^2 \text{Wst. } 2p + Da'^3 \text{Wst. } 3p + i \text{ t. d.}$$

mnożąc pierwsze z nich przez $\text{Wst. } mp$, drugie przez $\text{Dost. } mp$, i te potem mnożności dodane i odciągające zamieniliśmy na wstawy łuków kilkokrotnych za pomocą (β), otrzymamy dwa náyogólniejsze równania.

$$0 = A. \text{Wst. } mp + Ba' \text{Wst. } (m+1)p + Ca'^2 \text{Wst. } (m+2)p + i \text{ t. d.} \quad (B''_2)$$

$$0 = A. \text{Wst. } mp + Ba' \text{Wst. } (m-1)p + Ca'^2 \text{Wst. } (m-2)p + i \text{ t. d.}$$

chcąc podobne równania otrzymać przez funkcją dostaw, mnożę pierwsze z równań (B''_1) przez $\text{Dost. } mp$, drugie przez $\text{Wst. } mp$, a za pomocą (β) wypadną równania:

$$0 = A. \text{Dost. } mp + Ba' \text{Dost. } (m-1)p + Ca'^3 \text{Dost. } (m-2)p + i \text{ t. d.} \quad (B''_3)$$

$$0 = A. \text{Dost. } mp + Ba' \text{Dost. } (m+1)p + Ca'^2 \text{Dost. } (m+2)p + i \text{ t. d.}$$

(B''_2) i (B''_3) są równania náyogólniejsze zamykające mnożników (A'), s któremi równaiać iakąkolwiek funkcją podaną; wyciągniemy wartość kąta p i a' ; a przeto mnożników wzoru (A'); tyle nam bowiem wypadnie wartości na p , ile funkcya podana takowych mnożników zawiera. Równania (B''_2) i (B''_3) wyrażone przez wstawy i dostawy poddając więcę kombinacyi pomogą nam do tém łatwiejszego oznaczenia a' i kąta p . Pierwsze z (B''_2), drugie z (B''_3) służą na funkcją Powstającą (*ascendens*), w której potęgi ilości nieznanej rosną; równanie zaś drugie z (B''_2) i pierwsze z (B''_3) na funkcją Spadającą (*descendens*), w której się potęgi ilości nieznanej postępując, zniżają.

Zobaczmy te wszystkie prawidła w przykładzie: Niech będzie $a^n + z^n$ funkcją podaną, której chcemy wynaleźć mnożników podwójnych (A') pamiętając że $a' = \frac{a}{c}$, ponieważ ta funkcya zamyka pierwszy termin

termin a^n bez ilości nieznaney, równać ią należy z $(B''1)$, s czego wypadną dwa równania:

$$a^n + a'^n \text{ Dost. } np = 0 \quad \dots \quad a'^n \text{ Wst. } np = 0.$$

aże a nie może być zero, drugie z tych równań daje $\text{Wst. } np = 0$, trzeba więc za p brać wszystkie łuki, których wstawa zero, mając wzgląd na dodatnie i odjemne łuki: zaś te są $(2k+1)P$, albo $2kP$, k będąc liczbą iakąkolwiek całkową, P zaś półobwodem koła; pierwszym odpowiada dostawa -1 , drugim $+1$. Ponieważ zaś funkcya $a^n + z^n$ jest całą dodatnią, trzeba wziąć dostawę odjemną, aby się stała $a^n - z^n$, przez co nie wprowadzi wyrazów urojonych zamięniając się na równanie. Wziąwszy przeto,

$$np = (2k+1)P, \text{ czyli } p = \frac{(2k+1)P}{n} \text{ otrzymamy}$$

$$a^n = a'^n = \frac{a^n}{c^n}, \text{ to jest } a' = a, c = 1, \text{ i mnożnik po-}$$

dwóyny funkcyi podanę będzie

$$a^2 - 2az \text{ Dost. } \frac{(2k+1)}{n} P + z^2, \text{ gdzie za } 2k+1, \text{ brać na-}$$

leży wszystkie liczby nieparzyste nie przewyższające n ; wszystkie bowiem większe od n wracają tych samych mnożników. Niech będzie $n=5$; biorąc za $2k+1$, 1; 3; 5; otrzymamy:

$$a^2 - 2az \text{ Dost. } \frac{1}{5}P + z^2 \quad - \quad a^2 - 2az \text{ Dost. } \frac{3}{5}P + z^2; \quad - \quad a^2 + 2az + z^2.$$

ostatni mnożnik jest zupełną potęgą drugą, ponieważ dostawa $P = -1$; może on wchodzić cały za mnożnika funkcyi $a^5 + z^5$. Na ułatwienie tego zagadnienia wróćmy się do równań $(B''1)$; wypadło nam ich dwa dla tego, że tu idzie o mnożników podwóynych; ale jeżeli w którym s takowych mnożników dostawa $= \pm 1$; musi koniecznie wstawa być zero; a zatem jedno z równań $(B''1)$ niknie, i uczy nas, że w przypadku kiedy albo wstawa albo dostawa $= \pm 1$, na ten czas jeden tylko mnożnik wchodzi w skład funkcyi podanę. Wzię iękolwiek razy otrzymamy za mnożnika podwóynego zupełną potęgę drugą,

gdz druga, należy tylko ię pierwiastek brać za mnożnika funkcyi podanej. I tak w terażniejszym przykładzie mnożniki funkcyi a^5+z^5 , są

$$n^2-2az \text{ Dof. } \frac{1}{5}P+z^2, \quad a^2-2az \text{ Dof. } \frac{3}{5}P+z^2, \quad a+z.$$

Takóż przypatrzmy się funkcyi a^n+z^n , dostrzeżemy łatwo, że kiedy n jest liczbą parzystą, a^n+z^n nie ma żadnego mnożnika rzetelnego, ale a^n-z^n ma ich koniecznie dwa $a-z$, i $a+z$; kiedy zaś n jest liczbą nieparzystą a^n+z^n ma zawsze przynajmniey iednego mnożnika rzetelnego $a+z$, podobnie a^n-z^n iednego rzetelnego $a-z$.

Niech będzie funkcyą podaną $a^{2n}-2a^n z^n$ Dof. $g+z^{2n}$, mamy z nię za pomocą (B^1) dwa zrównania

$$n^2-2a^n a'^n \text{ Dof. } g, \text{ Dof. } np+a'^{2n} \text{ Dof. } 2np=0 \quad (1)$$

$$-2a^n a'^n \text{ Dof. } g, \text{ Wf. } np+a'^{2n} \text{ Wf. } 2np=0 \quad (2)$$

rozmnóżywszy pierwsze przez wf. $2np$, drugie przez doft. $2np$, i odciagnąwszy ie od siebie, otrzymamy takie zrównanie iakie nam wyraża (B^2), to jest:

$$a^{2n} \text{ wf. } 2np-2a^n a'^n \text{ doft. } g (\text{wf. } 2np \text{ doft. } np-\text{wf. } np \text{ doft. } 2np)=0.$$

$$\text{czyli } a^{2n} \text{ wf. } 2np-2a^n a'^n \text{ doft. } g \text{ wf. } np=0$$

$$\text{znosząc ie } z (z), \text{ wypada } a=\frac{a'}{c}, \quad c=1, \quad \text{wf. } 2np=$$

$$2 \text{ doft. } g \text{ wf. } np; \text{ aże wf. } 2np=2 \text{ doft. } np, \text{ wf. } np, \text{ więc } \text{doft. } g=\text{doft. } np; \text{ a ponieważ znówu } \text{doft. } (2kP+g)=$$

$$\text{doft. } g, \text{ będzie } p=\frac{2kP+g}{n}. \text{ Przeto biorąc za } 2k \text{ wszy-$$

fkie liczby parzyste nie przewyższające n , otrzymamy mnożników szukanych. Niech będzie $n=3$, funkcyą $a^6-2a^3 z^3$ doft. $g+z^6$, ma za mnożników

$$a^2-2az \text{ doft. } \frac{1}{3}g+z^2, \quad a^2-2az \text{ doft. } \frac{2P-g}{3}+z^2$$

$$a^2-2az \text{ doft. } \frac{2P+g}{3}+z^2.$$

§. LVII.

Sposób dopiero wyłożony rozbięcia funkcji na szeregów mnożników dwójtych, rościaga się nawet do

Szeregi nie-
skończone re-
zbięrają się na
mnożników.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{i t. d.} = \left(1 + \frac{x}{g}\right)^g$$

szereg ten będąc równy potędze wykładnika nieskończonego g , ma nieskończoną liczbę mnożników równych, iakże ich znajdziemy? zrównamy naprzód szereg nieskończony s swoją potęgą, tę zaś s funkcją $a^n - 2^n$, będzie

$$\left(1 + \frac{x}{g}\right)^g - 1 = \frac{x}{g} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{i t. d.}$$

przeto $1 + \frac{x}{g} = a$, $2 = 1$, $n = g$, a mnożnik podwójny (A') stanie się

$$\left(1 + \frac{x}{g}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{g}\right) \text{ dost. } \frac{2kP}{g} + 1,$$

biorąc teraz za $2k$ wszystkie liczby parzyste 0, 2, 4, 6, i t. d. wypadną nam mnożniki szeregu podanego: położmy $2k = 0$, otrzymamy za mnożnika 1go, $\frac{x^2}{g^2}$ s którego podług wyłożonej przyczyny w §. po-

przedzającym nie należy brać tylko $\frac{x}{g}$, ale że $\frac{x}{g}$ ma

bydź mnożone przez nieskończoną liczbę mnożników podwójnych; więc x jest w samej rzeczy pierwszym mnożnikiem naszego szeregu; co oczywiście się pokazuje. Chcąc teraz innych mnożników oznaczyć,

weźmy z § 54. (Φ), za dost. $\frac{2kP}{g}$ jego wartość w

pierwszych terminach szeregowych, uważając inne terminy rozdzielne przez potęgę g iako niknące, to jest

$$\text{dost. } \frac{2kP}{g} = 1 - \frac{2k^2P^2}{g^2}, \text{ a mnożnik nasz zamieni się na}$$

na $(1 + \frac{x}{g})^2 - 2(1 + \frac{x}{g})(1 - \frac{2k^2P^2}{g^2}) + 1 = \frac{x^2}{g^2} + \frac{4k^2P^2}{g^2}$
 $+ \frac{4k^2P^2x}{g^3}$; rozdzieliwszy wszystkie terminy drugiego

członka przez $\frac{4k^2P^2}{g^2}$ otrzymamy za mnożnika $1 + \frac{x}{g}$

$+ \frac{x^2}{4k^2P^2}$, w którym biorąc za k^2 wszystkie liczby
 parzyste, wypadnie nam nieskończona liczba mnożni-
 ków szeregu podanego, to jest:

$$x(1 + \frac{x}{g} + \frac{x^2}{4P^2})(1 + \frac{x}{g} + \frac{x^2}{16P^2})(1 + \frac{x}{g} + \frac{x^2}{36P^2})(1 + \frac{x}{g} + \frac{x^2}{64P^2}) \text{ i t. d. } = e^x - 1.$$

tymże samym sposobem znajdziemy, że

$$e^{-x} - 1 = (1 - \frac{x}{g})^2 - 1 = -\frac{x^2}{g^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot g^2} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot g^3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot g^4} - \text{ i t. d. } = x(1 - \frac{x}{g} + \frac{x^2}{4P^2})(1 - \frac{x}{g} + \frac{x^2}{16P^2})(1 - \frac{x}{g} + \frac{x^2}{36P^2}) \text{ i t. d.}$$

Doświadczmy jeszcze tego sposobu w funkcyach
 uroionych: wiemy że $ufl.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$;

$$e^{x\sqrt{-1}} = (1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2, e^{-x\sqrt{-1}} = (1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2$$

$$(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2 = 1 + \frac{2x\sqrt{-1}}{g} + \frac{x^2}{g^2}$$

$$(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2 = 1 - \frac{2x\sqrt{-1}}{g} + \frac{x^2}{g^2}$$

$$\text{będzie więc } ufl.x = \frac{(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2 - (1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2}{2\sqrt{-1}}$$

równając ten wyraz s funkcyą $a^n - z^n$, wypadnie

$$a = \frac{1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g}}{2\sqrt{-1}}; z = \frac{1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g}}{2\sqrt{-1}}; \text{ mnożnik zaś po-}$$

$$\text{dwójny}$$

dwójny będzie:

$$\frac{(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2}{-2} \cdot \frac{2(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g})(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g})}{-2} \cdot \frac{doft. 2kP}{g} + \frac{((1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2)}{-2} \cdot \frac{g}{g}$$

wykonawszy to mnożenie, i włożywszy za Doft. $\frac{2kP}{g}$

$= 1 - \frac{2k^2P^2}{g^2}$; wypadnie mnożnik $(1 - \frac{x^2}{k^2P^2})$; w

którym biorąc za k wszystkie liczby w porządku naturalnym, otrzymamy:

$$\begin{aligned} Wft. x &= x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \text{i t. d.} \\ &= x(1 - \frac{x^2}{P^2})(1 - \frac{x^2}{4P^2})(1 - \frac{x^2}{9P^2})(1 - \frac{x^2}{16P^2})(1 - \frac{x^2}{25P^2}) \\ &((1 - \frac{x^2}{36P^2}) \text{ i t. d.} = x(1 + \frac{x}{P})(1 - \frac{x}{P})(1 - \frac{x}{2P})(1 + \frac{x}{2P}) \\ &((1 - \frac{x}{3P})(1 + \frac{x}{3P})(1 - \frac{x}{4P})(1 + \frac{x}{4P}) \text{ i t. d. Wziąwszy} \end{aligned}$$

$$\text{znowu } Doft. x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \frac{(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2}{2} + \frac{(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{g})^2}{2}$$

porównawszy ten wyraz z funkcją

$$\begin{aligned} a^x + z^x, \text{ wynajdziemy:} \\ Doft. x &= 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{i t. d.} = (1 - \frac{4x^2}{P^2}) \\ &((1 - \frac{4x^2}{9P^2})(1 - \frac{4x^2}{25P^2})(1 - \frac{4x^2}{49P^2}) \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{2x}{P}\right) \left(1 + \frac{2x}{P}\right) \left(1 - \frac{2x}{3P}\right) \left(1 + \frac{2x}{3P}\right) \left(1 - \frac{2x}{5P}\right) \left(1 + \frac{2x}{5P}\right) \text{ i t. d.}$$

Jeżeli którykolwiek z tych mnożników wchodzących w wyraż wstawy stanie się zero; cały szereg zniknie, i wśt. $x=0$, co się trafi wziawszy za x , $0, P, 2P, 3P, kP$; k znacząc iakąkolwiek liczbę. Toż samo znaydziemy w dostawie, że ta zniknie, jeżeli $x = \frac{(2k+1)P}{2}$, co oczywiście z natury koła wypada.

Uczynimy teraz $x = \frac{m}{n} P$; $\frac{m}{n}$ wyraża stosunek iakiegokolwiek łuku do półokreśłu; będzie

$$\text{Wśt. } \frac{mP}{n} = \frac{mP}{n} \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right) \left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right) \text{ i t. d.}$$

$$\text{Dost. } \frac{mP}{n} = \left(1 - \frac{4m^2}{n^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{9n^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{25n^2}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{49n^2}\right) \text{ i t. d.}$$

a położywszy $2n$ za n , i rozebrawszy każdego z mnożników na dwa proste równania, te zamienia się na

$$\text{Wśt. } \frac{mP}{2n} = \frac{mP}{2n} \left(\frac{2n-m}{2n}\right) \left(\frac{2n+m}{2n}\right) \left(\frac{4n-m}{4n}\right) \left(\frac{4n+m}{4n}\right) \left(\frac{6n-m}{6n}\right) \left(\frac{6n+m}{6n}\right) \text{ i t. d.} \quad (L)$$

$$\text{Dost. } \frac{mP}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right) \left(\frac{n+m}{n}\right) \left(\frac{3n-m}{3n}\right) \left(\frac{3n+m}{3n}\right) \left(\frac{5n-m}{5n}\right) \left(\frac{5n+m}{5n}\right) \left(\frac{7n-m}{7n}\right) \left(\frac{7n+m}{7n}\right) \text{ i t. d.} \quad (M)$$

przypuśćmy teraz, że $\frac{mP}{2n} = 90^\circ$, czyli $m=n=1$, będzie

$$\text{dzie Wśt. } \frac{mP}{2n} = 1, \text{ równanie (M) zniknie, (L) zaś da}$$

$$\log. \left(1 - \frac{1}{49}\right) \left\{ -\frac{1}{49} - \frac{1}{2(49)^2} - \frac{1}{3(49)^3} - \frac{1}{4(49)^4} - \frac{1}{5(49)^5} - \text{i t. d.} \right.$$

a zebrałwszy szeregi s. terminów sobie podłożonych, nazwiemy:

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{i t. d.}$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{i t. d.}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{i t. d.}$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{i t. d.}$$

znaydziemy:

$$\log. \text{hy. } P = \log. 4 - (A - 1) - \frac{1}{2}(B - 1) - \frac{1}{3}(C - 1) - \frac{1}{4}(D - 1) - \text{i t. d.}$$

co zamieniwszy na ułamki dziesiątkowe, wypadnie nam bez wielkiej pracy.

$\log. \text{hyp. } P = 1,1447208858494$ i t. d. rozmnożywszy zaś tę liczbę przez 0,43429 i t. d. poług §. 50. wypadnie w układzie Briggsiusza.

$$\log. P = 0,4971498726241338 \text{ i t. d.}$$

Mając logarytm półowodnów koła, łatwo nam jest rachować logarytmy wstów i dostaw za pomocą zrównań (L), (M). widzimy bowiem że

$$\log. \text{Wst. } \frac{mP}{2n} = \log. P + \log. \frac{m}{2n} + \log. \left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + \log.$$

$$\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right) + \text{i t. d.}$$

$$\log. \text{Dost. } \frac{mP}{2n} = \log. \left(1 - \frac{mm}{n^2}\right) + \log. \left(1 - \frac{mm}{9n^2}\right) +$$

$$\log. \left(1 - \frac{mm}{25n^2}\right) + \text{i t. d.} \quad \text{dwa}$$

dwa te zrównania uczą nas sposobu rachowania tablic logarytmów na linie trygonometryczne, i takich codziennie w matematyce praktycznej używać zwykliśmy.

S tych wszystkich wyłożonych prawd oczywiście się pokazało, że rozbijanie szeregów nieskończonych przez które się funkcye przestępne wyrażają, na swe mnożniki, jest wielkiego barzo użycia w rachowaniu tablic logarytmów. Z nich wyciągnęliśmy wzory i liczby, na które natrafiamy we wszystkich praktycznej matematyki częściach, abysmy czytelnikowi wytknęli sposób, iakięgo dziś można użyć do wynaydowania ich. Niechcemy się dłużej nad tą materią rościagać, bo każdy z wyłożonych od nas początków, reszty sobie doysdź może bez najmniejszej trudności. Ułatwimy tylko króciuteńko to, co nam z wyższych pozostało uwag.

§. LVIII.

Zostawiliśmy w §. 35. nierozwiązane zadanie o rozbiarze funkcji ułomkowych zamykających mnożniki uroione w mianowniku, na ułomki proste; dla tego, żeśmy nie umieli iedźcie mnożników podwoynych rzetelnych, które z dwóch uroionych powstają, w wyrazie przyzwoitym wystawić. Doszedłszy teraz, że takowe mnożniki wyrazić się ogólnie mogą przez $a^2 - 2acz$ doft. $p + c^2z^2$ (Aa) należy nam się do tamtego zadania wrocic, i tu je dopełnić. Wystawmy sobie więc ułomek nayogólniejszy.

$$\frac{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{ i t. d. }}{a'+b'z+c'z^2+d'z^3+e'z^4+\text{ i t. d. }} = \frac{M}{N}$$

przypuścmy, że mianownik N zamykają w sobie mnożniki uroione proste, a zarēm mnożnika podwoynego $a^2 - 2acz$ doft. $p + c^2z^2$, i oprócz tego mnożników innych rzetelnych, które wyrażemy przez $S = a'' + b''z + c''z^2 + d''z^3 + e''z^4 + \text{ i t. d. }$ pamiętając na początki wyłożone w §. 35. przekonamy się, że ułomek $\frac{M}{N}$, ro-

Funkcyę ułomkową rozbięra się na mnożniki dwokształtne rzetelne, z dwóch uroionych złożone.

zbięra się na tę proste $\frac{M}{N} = \frac{A' + B'z}{a^2 - 2acz \text{ dofl. } p + c^2 z^2}$

$$+ \frac{R}{S} = \frac{M}{(a^2 - 2acz \text{ dofl. } p + c^2 z^2)S} \text{ a przeto}$$

$$R = \frac{M - (A' + B'z)S}{a^2 - 2acz \text{ dofl. } p + c^2 z^2}; R \text{ będąc ilością całkowitą, mu-}$$

si koniecznie $M - (A' + B'z)S$ być różdzielne przez $a^2 - 2acz \text{ dofl. } p + c^2 z^2$, a zatem uczyniwszy tę ostatnią funkcją zero, i z niej wydobytą wartość na z ,

$$z = \frac{a}{c} (\text{dofl. } p \pm \sqrt{-1} \cdot \text{wfl. } p), \text{ włożywszy w } M - (A'$$

$+ B'z)S$, będzie $M - (A' + B'z)S = 0$, s kąd wypada $M = A'S + B'Sz$ -- (Ab). należy nam więc naśm-przód przerobić M , N , na funkcję inną zamykającą nową wartość na z wziętą z (Aa), z nich potem o-trzymawszy dwa równania na z , potrafiemy ozna-czyć A' , B' . Zatrudniemy się teraz tym przerabia-

niem pamiętając na to, że $z^n = \frac{a^n}{c^n} (\text{dofl. } np \pm \sqrt{-1} \cdot$

$\text{wfl. } np)$, biorąc dla krótszego rachunku $\frac{a^n}{c^n} = m$, otrzy-

mamy naprzód dwa następujące równania na li-cznika M .

$$A + Bm \cdot \text{dofl. } p + Cm^2 \text{ dofl. } zp + Dm^3 \text{ dofl. } zp + i \text{ t. d.} = M' \\ \pm (Bm \cdot \text{wfl. } p + Cm^2 \text{ wfl. } zp + Dm^3 \text{ wfl. } zp + i \text{ t. d.}) \sqrt{-1} \\ = \pm M'' \sqrt{-1}.$$

na $A'S$

$$A' (a^n + b^n m \text{ dofl. } p + c^n m^2 \text{ dofl. } zp + d^n m^3 \text{ dofl. } zp + i \text{ t. d.}) \\ = A' N' \\ \pm A' (b^n m \text{ wfl. } p + c^n m^2 \text{ wfl. } zp + d^n m^3 \text{ wfl. } zp + i \text{ t. d.}) \sqrt{-1} \\ = \pm A' N'' \sqrt{-1}.$$

na $B'Sz$

$$B' (a^n m \text{ dofl. } p + b^n m^2 \text{ dofl. } zp + c^n m^3 \text{ dofl. } zp + i \text{ t. d.}) \\ = B' P' \\ \pm B' (a^n m \text{ wfl. } p + b^n m^2 \text{ wfl. } zp + c^n m^3 \text{ wfl. } zp + i \text{ t. d.}) \\ \sqrt{-1} = \pm B' P'' \sqrt{-1}.$$

W tćy

w tej odmianie zrównanie (Ab), rozdzieli się na dwa takie

$$M' + M''\sqrt{-1} = A'N' + A'N''\sqrt{-1} + B'P' + B'P''\sqrt{-1};$$

$$M' - M''\sqrt{-1} = A'N' - A'N''\sqrt{-1} + B'P' - B'P''\sqrt{-1},$$

które dodając i znowu odciągając od siebie, znajdziemy:

$$M' = A'N' + B'P'$$

$$M'' = A'N'' + B'P'' \quad \text{przeto}$$

$$A' = \frac{M'P'' - M''P'}{N'P'' - P'N''} \quad - - \quad B' = \frac{M''N' - M'N''}{N'P'' - P'N''}$$

mamy przez ostatnie dwa zrównania A' , B' ; a prze-

to licznika ułamku $\frac{A' + B'z}{a^2 - 2acz \text{ doft. } p + c^2 z^2}$, pamiętając

my tylko że M' otrzymujemy kładąc w M za z^n , $m^n \text{ doft. } np$; kładąc zaś w M za z^n , $m^n \text{ wft. } np$; otrzymujemy M'' : podobnie kładąc w S , $m^n \text{ doft. } np$ za z^n , otrzymujemy N' ; N'' zaś, kiedy $m^n \text{ wft. } np$ kładziemy za z^n w S : naostatek otrzymujemy P' kładąc w Sz , $m^n \text{ doft. } np$ za z^n ; P'' zaś, kładąc $m^n \text{ wft. } np$ za z^n w Sz : tym sposobem wynalazłszy M' , M'' , N' , N'' , P' , P'' , wypadają wartości na A' , B' , i zadanie się rozwiązuje.

Przykład: Niech będzie ułamek

$$\frac{1 + 2z + z^2}{(1 - \frac{8}{5}z + z^2)(1 + 2z + 3z^2)} = \frac{M}{N} \quad \text{który należy rozebrać}$$

na dwa ułamki wzoru $\frac{A' + B'z}{a^2 - 2acz \text{ doft. } p + c^2 z^2}$ biorąc

$1 - \frac{8}{5}z + z^2$ za mianownika ułamku szukanego, mamy

$$M = 1 + 2z + z^2, \quad S = 1 + 2z + 3z^2, \quad Sz = z + 2z^2 + 3z^3,$$

$$a^2 - 2acz \text{ doft. } p + c^2 z^2 = 1 - \frac{8}{5}z + z^2; \quad \text{a przeto } a = 1, c = 1,$$

$$m = 1, \quad z \text{ doft. } p = \frac{8}{5}, \quad \text{doft. } p = \frac{2}{5}.$$

Ponieważ nie mamy sfunktu łuku dostawy $\frac{2}{5}$ do obwodu koła, muszemy szukać wstów łuków powtarzanych za pomocą zrównań (x) w §. 11; dostaw zaś za pomocą zrównania

$$\text{Dofst. } p = \sqrt{[1 - (\text{wft. } p)^2]}, \quad \text{będzie więc}$$

V_2

$$\text{wft. } p =$$

$$\text{Wst. } p = \frac{3}{5} \quad \text{Dof. } p = \frac{4}{5}$$

$$\text{Wst. } 2p = \frac{24}{25} \quad \text{Dof. } 2p = \frac{7}{25}$$

$$\text{Wst. } 3p = \frac{117}{125} \quad \text{Dof. } 3p = \frac{44}{125}$$

kładąc zaś za z^n , doft. np. w M, S, Sz
otrzymamy M', N', P' ,

kładąc za z^n , wst. np. w M, S, Sz
otrzymamy M'', N'', P'' .

$$M' = 1 + \frac{24}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25} \quad M'' = 0 + 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$$

$$N' = 1 + \frac{8}{5} + \frac{21}{25} = \frac{86}{25} \quad N'' = 0 + 2 \cdot \frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{102}{25}$$

$$P' = \frac{4}{5} + \frac{2 \cdot 7}{25} - \frac{3 \cdot 44}{125} = \frac{38}{125} \quad P'' = \frac{3}{5} + \frac{2 \cdot 24}{25} + \frac{3 \cdot 117}{125} = \frac{666}{125}$$

s kąd wyciągniemy $N'P'' - P'N'' = \frac{2136}{125}$, a przeto

$$A' = \frac{1836}{2136} = \frac{12 \cdot 153}{12 \cdot 178} = \frac{153}{178}$$

$$B' = \frac{540}{2136} = \frac{12 \cdot 45}{12 \cdot 178} = \frac{45}{178}, \text{ a przeto}$$

ułamek pierwszy na który się rozbiórą $\frac{M}{N}$, jest

$$\frac{(153 - 45z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + z^2}$$

na wyłączenie drugiego ułamku, będzie $M = 1 + 2z + z^2$, $S = 1 - \frac{8}{5}z + z^2$, $a^2 - 2a \cdot \text{dof. } p + c^2 z^2 = 1 + 2z$

$+ 3z^2$, s kąd wypada $a = 1$, $c = \sqrt{3}$, $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$

dof. $p = \frac{1}{\sqrt{3}}$ podobnem iak przedtem działaniem

znaydziemy:

$$\text{Wst. } p =$$

$$Wst.p = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \dots Dofst.p = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Wst.2p = \frac{2\sqrt{2}}{3} \dots Dofst.2p = -\frac{1}{3}$$

$$Wst.3p = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \dots Dofst.3p = -\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

kładąc za z^n , $(-1\sqrt{3})^n Dofst.np$ w M, S, Sz
otrzymamy M', N', P' .
kładąc zaś $z^n = (-1\sqrt{3})^n Wst.np$ w M, S, Sz .
otrzymamy M'', N'', P'' .

$$M' = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$M'' = 0 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$N' = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} - \frac{1}{9} = \frac{64}{45}$$

$$N'' = 0 + \frac{8\sqrt{2}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = \frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$P' = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{8}{8\sqrt{2}} + \frac{5}{9\sqrt{2}} = \frac{135}{98\sqrt{2}}$$

$$P'' = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{8}{8\sqrt{2}} - \frac{5}{9\sqrt{2}} = -\frac{135}{98\sqrt{2}}$$

s kąd wypadnie $N'P'' - P'N'' = -\frac{712\sqrt{2}}{675}$, a przeto

$$A' = \frac{25}{178}, B' = \frac{135}{178}, \text{ i ułamek drugi} = \frac{(25+135z):178}{1+2z+3z^2}$$

$$\text{przeto} = \frac{(153-45z):178}{(1-\frac{8}{5}z+z^2)(1+2z+3z^2)} = \frac{1-\frac{8}{5}z+z^2}{(25+135z):178}$$

$$+ \frac{1+2z+3z^2}{(25+135z):178}$$

w tym rachunku P', P'' wypadają s teyże samey funkcyi S rozmnożonéy przez z , s który N', N'' możemy

żemy więc przez kombinacyą bardzo prostą P' , P'' wyrazić przez N' , N'' ; iakóż przekonamy się że

$$P' = m(N' \text{Dofł. } p - N'' \text{Wfl. } p).$$

$$P'' = m(N' \text{Wfl. } p + N'' \text{Dofł. } p) \quad \text{przeto}$$

$$N'P'' - N''P' = (N'N' + N''N'')m \text{Wfl. } p$$

$$M'P'' - M''P' = (M'N' + M''N'')m \text{Wfl. } p. + (M'N'' - M''N').$$

$$m \text{Dofł. } p$$

$$\text{Przeto } A' = \frac{M'N' + M''N''}{N'N' + N''N''} + \frac{(M'N'' - M''N') \text{Dofł. } p}{N'N' + N''N'' \cdot \text{Wfl. } p}$$

$$B' = \frac{M''N' - M'N''}{N'N' + N''N'' \cdot m \cdot \text{Wfl. } p} \quad (Y)$$

§. LIX.

Rozwiązanie
się to samo za-
danie, kiedy
mianownik za-
wierá maożni-
ków podwó-
nych równych

Uważaliśmy w terażniejszy rozbiórce ułomku $\frac{M}{N}$, że N nie zawiera w sobie mnożników równych

$a^2 - 2acz \text{Dofł. } p + c^2z^2$; przypuściwszy zaś że N zamyka różne iakiśkolwiek potęgi takowych podwóynych mnożników n.p. $(a^2 - 2acz \text{Dofł. } p + c^2z^2)^s$, na tén czas S zawierá także w sobie $a^2 - 2acz \text{Dofł. } p + c^2z^2$, i położywszy w zrównaniu $M = A'S + B'Sz - (Ab)$, $z^n = m^n (\text{Dofł. } np \pm \sqrt{-1} \cdot \text{Wfl. } np.)$ będzie $S = 0$, a zatém $M = 0$, co nie tylko nám nie dá żadney wartości na A' , B' ; ale ieszcze wprowadzi warunek cale przeciwny zadaniu uczyniwszy $M = 0$: S téy uwagi ła-

two się przekonać, że kiedy funkcyą $\frac{M}{N}$ zawierá w sobie

mnożników podwóynych równych, sposób rozbióra-
nia iey musi byđz różny od tego, któregośmy dopie-
ro użyli. Ta różnica iuż nám się pokazała wyżej
pod §. 35. i oráż powinna nás wiele oświecić w
terażniejszy rachunku.

Niech będzie $N = (a^2 - 2acz \text{Dofł. } p + c^2z^2)^s S$, gdzie
 S zamyká mnożniki różne od tego, który iest w po-
tędze s ; §§. 34, 35, iuż nás przekonaly, że funkcyá
takowá rozbióra się koniecznie na inne takich wzo-
row,

rów, jakie nam następujące wyraża zrównanie:

$$\frac{M}{A'+B'z} = \frac{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^s}{C'+D'z} = \frac{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^s}{E'+F'z} \\ + \frac{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^{s-1}}{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^{s-1}} + \frac{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^{s-2}}{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^{s-2}} \\ + \text{i t. d.} + \frac{R}{S}, \text{ z niego wypada:}$$

$$R = \frac{M - S[A' + B'z + (C' + D'z)(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2) + \text{i t. d.}]}{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^s}, (A_2)$$

położywszy teraz $a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2 = 0$, wszystkie następujące terminy odpadną, zostawiwszy $M - SA' - SB'z = 0$, włożywszy więc w M, S, Sz , za z^n, m^n . $\text{Dofl. } np, m^n \text{ Wfl. } np$. otrzymamy A', B' tak, jak w poprzedzającym działaniu: miewszy już A', B' , oznaczone, $M - SA' - SB'z$, jest koniecznie rozdzielne przez $a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2$, wykonawszy to dzielenie, otrzymamy wieloraz P' , to jest:

$$P' = \frac{M - SA' - SB'z}{a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2}, \text{ a zrównanie } (A_2) \text{ zni-}$$

ży się o jeden stopień, i da nam następującą wartość:

$$R = \frac{P' - S[C' + D'z + (E' + F'z)(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2) + \text{i t. d.}]}{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^{s-1}}$$

gdzie znówu mianownik stawczy się zero, zostawi $P' - SC' - SD'z = 0$. Kładąc w $P', S, Sz, m^n \text{ Dofl. } np, m^n \text{ Wfl. } np$ za z^n , oznaczmy C', D' ; te oznaczone wartości na C', D' , uczynią $P' - SC' - SD'z$ zupełnie rozdzielne przez $a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2$: wykonawszy to dzielenie i nazwawszy jego wieloraz Q' , będzie

$$Q' = \frac{P' - SC' - SD'z}{a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2}; \text{ włożywszy znówu } Q' \text{ w}$$

zrównanie ostatnie na R , zniżemy je jeszcze o jeden stopień:

$$R = \frac{Q' - S[E' + F'z + (G' + H'z)(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2) + \text{i t. d.}]}{(a^2 - 2acz \text{ Dofl. } p + c^2 z^2)^{s-2}}$$

V₄

podobnem

podobnem rozumowaniem i działaniem wynaydziemy znowu E', F' , w czém nam wiele pomoże dokładne zrozumienie §. 35.

Używając zrównań (Y) na A', B' , wiedzieć nam należy, że te same służą nam na $C', D'; E', F'; G', H'$; i t. d. wszystkich liczników ułamków prostych, na które się $\frac{M}{N}$ rozbięra; pamiętając na to, że w nich

N', N'' , iako wypadające z S zostaną nienaruszone, ale M', M'' , odmiennieją się z odmianą M , tak dalece, że iako wypadają w pierwszym ułamku kładąc $m^n \text{Dofl.}np, m^n \text{Wst.}np$, za z^n w M ; tak w drugim na C', D' , wypadną kładąc w P' ; w trzecim na E', F' , kładąc w Q' , te same wartości za z ; i t. d.

Przykład. Niech będzie funkcyá podana

$$\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}, \text{ gdzie } M=z-z^3, S=1+z^4, a^2=2acz.$$

$\text{Dofl.}p+c^2z^2=1+z^2$, a przeto $a=1, m=1, \text{Dofl.}p=0$ więc $p=\frac{1}{2}p$; tu P' znaczy półobwód koła, będzie więc.

$$\begin{aligned} \text{Wst.}p &= 1 & \text{Dofl.}p &= 0 \\ \text{Wst.}2p &= 0 & \text{Dofl.}2p &= -1 \\ \text{Wst.}3p &= -1 & \text{Dofl.}3p &= 0 \\ \text{Wst.}4p &= 0 & \text{Dofl.}4p &= 1. \end{aligned}$$

ułamek zaś $\frac{z-z^3}{(1+z^2)^4(1+z^4)}$ rozbięra się na $\frac{A'+B'z}{(1+z^2)^4}$

$$+ \frac{C'+D'z}{(1+z^2)^3} + \frac{E'+F'z}{(1+z^2)^2} + \frac{G'+H'z}{1+z^2} + \text{i t. d.}$$

kładąc wspomniane wartości na z , w M, S, Sz , wypadnie nam $M'=0, M''=2, N'=2, N''=0$, przeto z (Y) $A'=0, B'=1$.

$$P' = \frac{-z^3-z^5}{1+z^2} = -z^3, \text{ kładąc w } P', \text{Dofl.}np, \text{Wst.}np,$$

za z^n , otrzymamy $M'=0, M''=1$, zaczęm idzie $C'=0, D'=\frac{1}{2}, C'+D'z=\frac{1}{2}z$;

$$Q' =$$

$$Q' = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1+z^2} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3; \text{ kładąc w } Q' \text{ za } z,$$

z^3 wspomnioną wartość, wypadnie $M'=0$, $M''=0$,
a zatem $E'=0$, $F'=0$.

$$R' = \frac{Q' - SE' - SF'z}{1+z^2} = \frac{Q'}{1+z^2} = \frac{-z - z^3}{2(1+z^2)} = -\frac{1}{2}z,$$

włożywszy za z wartość wspomnianą w R' , znaj-
dziemy $M'=0$, $M''=-\frac{1}{2}$, a przeto $G'=0$, $H'=-\frac{1}{2}$.

Zaczem

$$\frac{z - z^3}{(1+z^2)^2(1+z^4)} = \frac{1}{(1+z^2)^4} + \frac{1}{2(1+z^2)^3} - \frac{1}{4(1+z^2)} + \text{i t. d.}$$

§. LX.

Rozbijanie funkcji ułomkowej składanej, na ułom-
ki proste było nam potrzebne w §. 36, do wynay-
dowania wyrazów ogólnych na szereg zwrotny, któ-
re się s funkcji ułomkowych rodzą. Spółob w §. 36.
na odkrycie wyrazów ogólnych podany, nie rościaga
się do ułomków mających w mianowniku mnożniki
uroione, bo dopiero za pomocą wstaw i dostaw po-
trafilismy ogólnie wyrazić funkcją dwó-kształtną rze-
telną, złożoną z dwóch uroionych, nauczywszy się
zaraz rozbić iakakolwiek bądź funkcją całką
lub łamaną na takowe mnożniki. S tych wiadomo-
ści łatwo nam jest barzo to dopełnić, cośmy w §. 36
o wyrazach ogólnych opuścili. Przypomniemy sobie
nāprzód wzory wyrazów ogólnych, któreśmy w §. 33
podali na szereg rodzące się z ułomków $\frac{A}{1-pz}$,

Przytósowa-
nie poprzedza
iacy nauki do
szeregow,

$\frac{A}{(1-pz)^n}$: potrzebą nam teraz podobne wynaleśdź
na funkcyę pozostałą

$$(1) \frac{A+Brz}{1-2rz \text{ Dofl. } p+r^2z^2} - (2) \frac{A+Brz}{(1-2rz \text{ Dofl. } p+r^2z^2)^2}$$

Gdybyśmy pierwszą n.p. funkcją rozebrali na szereg
pfosobem Des-Carta w §. 32 użyłym, i w tym szere:

Vf

gu

gu upatrowali prawa, podług którego ukladają się terminy; ciężkoby nam było dostrzec zaraz wyrazu ogólnego dla przyczyn wyłożonych w §. 33. Chwyćmy się więc drogi iednostajnie nam w całej téj nauce służącej, to jest: obierzmy sobie inné funkcyę ułomkową z mianownikiem $1 - 2rz \text{ Doft. } p + r^2 z^2$, któręby nam w swym szeregu łatwo odkryły wyraz ogólny; s temi dopiero równaiąc funkcyą (1), przydziemy do wynalezienia iey wyrazu ogólnego.

Niech będzie $\frac{\text{Lrz. Wst. } p}{1 - 2rz \text{ Doft. } p + r^2 z^2}$ funkcyą wspomnioną, rozbiéraiąc ją na szereg podług §. 32.

$$\frac{\text{Lrz. Wst. } p}{1 - 2rz \text{ Doft. } p + r^2 z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{i t. d.}$$
 oznaczemy $A, B, C, D, \text{i t. d.}$ i otrzymamy szereg:

$$\text{Lrz. Wst. } p + \text{Lr}^2 z^2 \text{ Wst. } 2p + \text{Lr}^3 z^3 \text{ Wst. } 3p + \text{Lr}^4 z^4 \text{ Wst. } 4p + \text{i t. d.} \quad (a)$$
którego wyraz ogólny oczywiście się pokazuje

$$\text{Lr}^n z^n \text{ Wst. } np. \quad (a')$$

Niech będzie powtóre funkcyą inną $\frac{Q - Qrz \text{ Doft. } p}{1 - 2rz \text{ Doft. } p + r^2 z^2}$,

którą przez ten sam sposób rozebrałszy na szereg, otrzymamy:

$$Q + Qrz \text{ Doft. } p + Qr^2 z^2 \text{ Doft. } 2p + Qr^3 z^3 \text{ Doft. } 3p + \text{i t. d.} \quad (b)$$
którego wyraz ogólny jest $Qr^n z^n \text{ Doft. } np \quad (b')$

złączmy teraz funkcyą pierwszą z drugą, otrzymamy:

$$\frac{Q + \text{Lrz. Wst. } p - Qrz \text{ Doft. } p}{1 - 2rz \text{ Doft. } p + r^2 z^2} \quad (c)$$

wyraz ogólny téj ostatniéy funkcyi, jest równy sumie wyrazów ogólnych (a') , (b') , to jest:

$$(L \text{ Wst. } np. + Q \text{ Doft. } np) r^n z^n \quad (c')$$

a ponieważ funkcyą (c) jest wzoru podobnego do

$$\frac{A + Brz}{1 - 2rz \text{ Doft. } p + r^2 z^2} \quad (1), \text{ równaiąc ich liczników}$$

między sobą wypadnie wartość na L, Q , wyrażoną przez A, B , a przeto i wyraz ogólny. Otrzymamy bowiem

bowiem z porównania terminów $A=Q$, $B=L.Wf.p$
 $-Q.Dof.p$, czyli $L=\frac{B+A.Dof.p}{Wf.p}$, włożywszy te war-

tości za L , Q , w (c'), znajdziemy:
 $(B.Wf.np+A.Wf.np.Dof.p+A.Wf.p.Dof.np)r^{nz^n}$. Aże

$\frac{Wf.p}{Wf.np.Dof.p+Wf.p.Dof.np}=Wf.(n+1)p$; więc
 $B.Wf.np+A.Wf.(n+1)p$ jest wyrazem ogólnym
 szeregu wypadającego z funkcji ułomkowej
 $\frac{A+Brz}{1-2rz.Dof.p+r^2z^2}$

Zostaie nam teraz wynaleść wyraz ogólny szeregu
 powstałego z funkcji której mianownikiem jest
 $(1-2rz.Dof.p+r^2z^2)^s$. Ten żebyśmy mogli z §. 33.
 wyciągnąć, przypomniemy sobie że funkcji $\frac{A}{(1-qz)^s}$

wyraz ogólny jest:
 $\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+g-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (g-1)} Aq^{nz^n}$

potrzebaby nam więc funkcją naszą przywieść do
 wzoru $\frac{A}{(1-qz)^s}$ na ten koniec rozberzmy

$(1-2rz.Dof.p+r^2z^2)^s$, na dwa mnożniki proste, chociaż
 urozone: $(1-(Dof.p+\sqrt{-1}.Wf.p)rz)^s$, $(1-(Dof.p$
 $-\sqrt{-1}.Wf.p)rz)^s$ przez co funkcja złożona rozbie-
 rze się na te dwa ułamki:

$\frac{K}{(1-(Dof.p+\sqrt{-1}.Wf.p)rz)^s} + \frac{E}{(1-(Dof.p-\sqrt{-1}.Wf.p)rz)^s}$,
 których mianowniki równając z $\frac{A}{(1-qz)^s}$ wypadnie

$q=r.Dof.p+r\sqrt{-1}.Wf.p$ w pierwszym; $q=r.Dof.p$
 $-r\sqrt{-1}.Wf.p$, w drugim ułamku; a przeto $q^n=r^n$
 $(Dof.np+\sqrt{-1}.Wf.np)$, $q^n=r^n(Dof.np-\sqrt{-1}.Wf.np)$;
 V6 wyraz

wyraż więc ogólny obydwóch tych ułamków będzie:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+g-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (g-1)} (Dofl.p + \sqrt{-1} . Wfl.p) K r^{n+1} +$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+g-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (g-1)} (Dofl.p - \sqrt{-1} . Wfl.p) L r^{n+1}$$

uczyniwszy potem $K+L=f$, $K-L=\frac{h}{\sqrt{-1}}$, będzie

$$K = \frac{f\sqrt{-1}+h}{2\sqrt{-1}}, L = \frac{f\sqrt{-1}-h}{2\sqrt{-1}}, \text{ a przeto}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (n+g-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (g-1)} (f Dofl.p + h Wfl.p) r^{n+1} \dots (s)$$

jest wyrazem ogólnym szeregu powstającego z dwóch ułamków:

$$\frac{1}{2} f + \frac{h}{2\sqrt{-1}} \quad \frac{1}{2} f - \frac{h}{2\sqrt{-1}}$$

$$(1 - (Dofl.p + \sqrt{-1} . Wfl.p) r z)^s + (1 - (Dofl.p - \sqrt{-1} . Wfl.p) r z)^s$$

czyli ułamku jednego:

$$f - g f r z Dofl.p + \frac{g(g-1)}{1 \cdot 2} f r^2 z^2 Dofl.p + i \text{ t. d.}$$

$$+ g h r z Wfl.p - \frac{g(g-1)}{1 \cdot 2} h r^2 z^2 Wfl.p + i \text{ t. d.}$$

$$(1 - 2 r z Dofl.p + r^2 z^2)^s.$$

Ten ułamek wystawia nam najogólniejszy wzór wszystkich ułamków mających w mianowniku jakąkolwiek potęgę mnożnika podwoynego $1 - 2 r z Dofl.p + r^2 z^2$, których wyrazy ogólne są zamknięte w (s). Mamy więc już sposób znajdowania wyrazów ogólnych w szeregach powstających z jakiegokolwiek funkcyi wymiernych; w obydwóch zaś tego Tomu częściach to wszystko, czegokolwiek nas dziś Algebra może o równaniach i funkcyach nauczyć.

KOŃCIE PIERWSZEGO TOMU

W Y P I S

MATERYI W PIERWSZYM TOMIE ZAWARTYCH.

CZĘŚC PIERWSZA.

PO FUNKCYACH I ZRÓWNANIACH ALGEBRAICZNYCH.

ROZDZIAŁ I. O prawidłach i pierwznych myślenia początków wydobytych, które w działaniu iakichkolwiek, i w sposobach rozwiązanai Zrównan Pierwszego Stopnia zachodzą.

- §. 1. Pierwsze początki myślenia któremi ludzie przychodzą do wynalazków. karta . . . 1.
 Uwagi pokazujące konieczną potrzebę wprowadzenia w rachunek znaków ogólniejszych nad liczbą. 3.
 Przestroga w znaczeniu ilości. 4.
 §. 2. Sposoby zestawione rozumowi ludzkiemu dochodzenia rzeczy nieznanych. 5.
 Znaki mnożenia, dzielenia. 6.
 Znaki dodawania, odciągania i równości. 7.
 Opis zrównania, funkcyi i ich różnicy. 8.
 §. 3. Tłómaczy się użycie znaku dodatniego i odjemnego. 9.
 Opisuie się dodawanie i odciąganie Algebraiczne s kąd wyciągają się prawidła na te działania. 10.
 Tłómaczy się znaczenie współ-czynników i sposób obchodzenia się z niemi. 12.
 Opisuie się mnożenie Algebraiczne, s czego wyciągają się różne prawidła. 13.
 Znaczenie wykładników. 14.
 Prawidło na znaki wyciągają się z opisu mnożenia. 16.
 Dzielenie Algebraiczne i reguły mu służące. 17.
 Prawidło na znaki w dzieleniu. 19.
 Z natury funkcyi ułomkowych wypadają prawidła działań w nich zachodzące. 22.

§. 4.

- §. 4. Zbiór krótki wyłożonych wyżej początków
wracający nas do natury równań. 25.
Drogi zwyczajne myślenia stosowane do ro-
związania równań. 27.
§. 5. Poprzedzających uwag wyciąga się правило
ogólne na rozwiązanie równań 1go stopnia. 29.
§. 6. Równaia się wypadki arytmetyczne z alge-
braicznemi. 30.
Z równań wyciąga się reguła arytmetyczna
towarzystwa. 32.
Opisanie Analysis podług niektórych Geometrów,
i jej różnica od Algebry. tamże.
§. 7. Początki prowadzące do rozwiązania py-
tań wiele nieznaney rzeczy, zamykających. 33.
§. 8. Tłumaczy się stan poznawania, kiedy w py-
taniu mniej zachodzi związków niżeli rzeczy
nieznaneych: s kąd się wyciąga natura pytań
nieoznaczonych. 39.
§. 9. Wyłożenie ogólne początku ilości nieozna-
czonych. 41.
§. 10. Z różności pytań wykladaia się różne ga-
tunki równań i własności im służące. 46.

ROZDZIAŁ II. O poznaniu funkcyi WIELO-KSZTAŁ-
TNYCH i działaniach im służących: s kąd o ZRÓ-
WNANIACH DRUGIEGO STOPNIA i ich własnościach.

- §. 11. Nowy rodzaj równań odkrywa nam ró-
żne potęgi w funkcyach i działania im właściwe. 49.
Tłumaczy się skład potęgi drugiej i sposób wy-
noszenia do niej funkcyi wielo-wyrazowych. 51.
Wzór ogólny równań i funkcyi drugiej potęgi. 52.
§. 12. Skład i własności wyższych iakiegokolwiek
potęg. 53.
§. 13. Własności i znaczenia funkcyi niewy-
miernych. 57.
§. 14. Rozwiązuie się równanie 2go stopnia. 63.
§. 15. Znaczenie i własności pierwiastków uro-
wionych. 68.

§. 16. Zrównanie drugiego stopnia składa się z	
dwóch pierwszego stopnia.	71.
Działania funkcji niewymiernych.	72.
Dodawanie i odejmowanie	tamże.
Przywożenie do jednego znaku pierwiastkowego.	73.
Wynoszenie do potęg i wyciąganie pierwiastków.	74.
Mnożenie i dzielenie.	75.
Tłumaczy się znaczenie ilości nieskończenie wiel-	
kiey, i nieskończenie małej, i wyrazu nieozna-	
czonego $\frac{0}{0}$	80.
§. 17. Wypadki poprzedzających uwag i praw-	
da zrównań 2go stopnia dalej rościągnione.	83.
Treść nauki w całym Rozdziale.	85.

ROZDZIAŁ III. O ogólnych właściwościach zrównań jakiegokolwiek stopnia.

§. 18. Uwagi Logiczne objaśniające sposób my-	
ślenia przez rachunek.	87.
§. 19. Wykładają się właściwości ogólne zrównań	
jakiegokolwiek stopnia.	89.
Właściwości współ-czynników.	90.
Właściwości zrównań co do znaków.	92.
§. 20. Rozwiązanie zrównań wyższych stopni	
zamyka wszystkie zrównania stopni niższych.	93.
§. 21. Właściwość ostatniego terminu zamyka spo-	
sób na rozwiązanie zrównania.	96.
§. 22. Wyrzucenie terminu jakiegokolwiek w zrów-	
nowaniu.	98.
§. 23. Z właściwości zrównań wyciąga się dowód	
wzoru Newtona.	100.
Użycie wzoru Newtona rościągnione do potęg	
jakichkolwiek wykładników.	104.
Stosowanie wzoru Newtona do wyciągania	
pierwiastku w potęgach jakichkolwiek.	108.

§. 24.

- §. 24. O liczbie pierwiastków rzetelnych i uroionych w zrównaniu. 109.
- §. 25. Tłómaczy się potrzeba i sposób oswobodzenia zrównań od znaków pierwiastkowych, i od niewymierności. 112.
- §. 26. Sposoby eliminacyi na zrównaniach wyższych stopni. 115.
- §. 27. Różność zrównań wyklada się z różności wymiaru w terminach. 122.
Dowodzą się s poprzedzających wiadomości wielkie korzyści rachunku, przeciwko zarzutom pewnych Autorów. 123.

ROZDZIAŁ IV. O zrównaniach trzeciego i czwartego stopnia, i o przeszkodach które zatamowały postępki Geometrów w rozwiązaniu zrównań wyższych stopni.

- §. 28. Rozwiązanie zrównania 3go stopnia. 125.
Przypadek w którym zrównania 3go stopnia nie może być dokładnie rozwiązane. 131.
- §. 29. Rozwiązanie się zrównanie 4go stopnia. 134.
Ułatwia się trudność o liczbie pierwiastków. 137.
Gatunki pierwiastków wyciągają się s porównania stopnia 3go s 4tym. 139.
Przejsie do drugiej Części. 142.
- §. 30. Sposób rozeznawania potęg zupełnych w funkcyach niewymiernych. 143.
Użycie tego samego sposobu w funkcyach uroionych. 148.
- §. 31. Ogólny sposób rozeznawania pierwiastków uroionych w zrównaniu. 152.
Stosowanie poprzedzającej teoryi do zrównań 3go stopnia. 156.

CZĘŚĆ DRUGA

TŁOMACZĄCA NATURE I WŁASNOŚCI FUNKCYI
PRZESTĘPNYCH, ORAZ SPOSOB ONYCH WYRA-
ŻANIA.

ROZDZIAŁ I. O rozbijaniu funkcyi na szeregi: o szeregach zwrotnych, i sposobie wynaydowania ogólnego ich wyrazu.

- §. 32. Porównanie funkcyi algebraicznych s. przestępnymi. 165.
Wyciągają się zadania zachodzić mogące w teorii szeregów. 168.
Sposoby rozbijania funkcyi ułamkowych na szeregi. 166.
Właściwości szeregów zwrotnych. 169.
§. 33. Rozwiązują się szczególne przypadki w ułamkach rodzących szeregi. 170.
Podają się wyrazy ogólne na szeregi zwrotne. 173.
§. 34. Wyróżniają się ułamki składane przez ułamki proste. 178.
§. 35. Sposoby rozbijania ułamków składanych na proste. 181.
§. 36. Przystosowanie poprzedzającej teoryi do wynaydowania wyrazów ogólnych. 187.
Tłómaczy się związek między licznikami ułamków prostych, i terminami szeregu. 189.
§. 37. S poprzedzających uwąg wypadają nowe właściwości zwrotnych szeregów co do związku terminów. 191.
§. 38. Teorya szeregów zwrotnych prowadzi nas do wynaydowania pierwiastków bliskich

W. prawdy

prawdy w zrównaniu.	197.
Uwagi nad sposobem poprzedzającym.	201.
Sposób Newtona prowadzący do pierwiastków	
zrównania co raz bliższych prawdy.	203.
Teorya Bernoullego nie służy, kiedy zrówna-	
nie ma pierwiastki równe.	203.
§. 39. Sposób rozczynawania pierwiastków równych	
w zrównaniu.	204.

ROZDZIAŁ II. O zbieraniu szeregów zwrótnych i ułamkach ciągłych.

§. 40. Summowanie szeregów zwrótnych wiedząc	
związek zachodzący między terminami.	207.
§. 41. Nie wiedząc związku między terminami	
szeregu, sposób wynalezienia go i rozczynania	
szeregów zwrótnych od innych.	210.
§. 42. Opisanie ułamków ciągłych.	216.
S. kąd się rodzą.	217.
Ich własności co do znaków.	218.
§. 43. Ułamki ciągłe przerabiają się na pospólne.	220.
§. 44. Z ułamków pospółtych wyciągają się	
własności ułamków ciągłych.	225.
§. 45. Tłómaczy się nowy rodzaj szeregów.	232.
Teorya J. P. Coufin do rozbierania funkcji lub	
zrównania na szeregi.	233.
§. 46. Przerabiają się szeregi na ułamki ciągłe.	237.
§. 47. Summowanie postępów arytmetycznych i	
geometrycznych. prowadzi nas do nowego ro-	
dzaju zrównań i funkcji.	243.

ROZDZIAŁ III. O pierwszym rodzaju funkcji prze- stępnych, czyli logarytmach, i sposobie rachowania tablic logarytmów.

§. 48. Uwagi nad wykładnikami odjemnemi pro-	
wadzą nas do poznania logarytmów.	245.
Rozwinięcia	

- Rozwiązują się równania przestępne za pomocą logarytmów. 242.
 Historya tego wynalazku. 250.
 §. 49. Rozbieraia się logarytmy i funkcyje układnicze na szeregi. 252.
 Wyciągaia się równania na rathowanie tablic logarytmów. 256.
 §. 50. Sposób przerabiania logarytmów iednego, na logarytmy drugiego układu. 259.
 Pokazuje się użycie tablic logarytmicznych w cudomkach. 261.

ROZDZIAŁ IV. O drugim rodzaju funkcyi przestępnych, czyli własnościach łukow koła: o sposobie rachowania tablic trygonometrycznych, ich logarytmów, i użyciu tego rachunku.

- §. 51. Obráz ogólny o wymiarach płaszczyzn. 266.
 Z wymiaru płaszczyzn wypada potrzeba trygonometrii, i linii w niej używanych. 267.
 §. 52. Linie trygonometryczne dodatnie i odjemne. 274.
 Linii każdej trygonometryczney odpowiada nieskończona liczba łuków. 276.
 §. 53. Sposób zamieniania mnożości i potęg w liniach trygonometrycznych. 278.
 §. 54. Tłomaczy się sposób rachowania tablic wstępu, dostępu, i t. d. 280.
 Rachunek Stycznych i Dostycznych. 284.
 §. 55. Zamiana funkcyi uroionych za rzetelne, i wyraż logarytmów przez łuki koła. 285.
 §. 56. Przystosowanie poprzedzającej nauki do wyrażdowania mnożników podwójnych funkcyi. 288.
 §. 57. Szeregi nieskończone rozbieraia się na mnożników. 295.

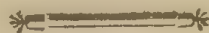
Sposób

Spółób rachowania logarytmów Wstów i Do-
stów. 298. 299.

§. 58. Funkcye ułomkowe rozbić się na mno-
żniki dwoiste rzetelne, złożone z uroionych. . . 301.

§. 59. Tén rozbiór pokazuje się, kiedy miano-
wnik zawiera potęgi takowych mnożników po-
dwójnych. 306.

§. 60. Stosuje się też nauka do wynaydowania
summy szeregów. 309.



Tablica do karty 22.

Przykład I. Mnożenia.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ax - 3xb^2 \\ a^2 - 2ax + 3xb^2 \\ \hline a^4 + 2a^3x - 3a^2b^2x \\ - 2a^3x - 4a^2x^2 + 6ab^2x^2 \\ + 3a^2b^2x + 6ab^2x^2 - 9b^4x^2 \\ \hline a^4 + 0 - 4a^2x^2 + 12ab^2x^2 - 9b^4x^2 \end{array}$$

Przykład I. Dzielenia.

Funkcja Dzieląca.	Podzielna.	Wieloraz
$a^3 + 3abc - b^2c$	$2a^5 + a^3bc - 2a^2b^2c - 5ab^2c^2 + 5b^3c^2$	$2a^2 - 5bc$
	$- 2a^5 - 6a^3bc + 2a^2b^2c$	
	$- 5a^3bc - 15ab^2c^2 + 5b^3c^2$	
	$+ 5a^3bc + 15ab^2c^2 - 5b^3c^2$	
	0	

Przykład II. (B).

$$\begin{array}{r} a^2 + ab \mid a^3 + 2a^2b - ab^2 \\ - a^3 - a^2b \\ \hline a^2b - ab^2 \\ - a^2b - ab^2 \\ \hline - 2ab^2 \\ + 2ab^2 + 2b^3 \\ \hline 2b^3 \end{array}$$

Wieloraz.

$$a + b - \frac{2b^2}{a} + \frac{2b^3}{a^2} - \frac{2b^4}{a^3} + \frac{2b^5}{a^4} - \text{i t. d.}$$

$$\begin{array}{r} 2b^3 \\ - 2b^3 - \frac{2b^4}{a} \\ \hline - \frac{2b^4}{a} \\ + \frac{2b^4}{a} + \frac{2b^5}{a^2} \text{ i t. d.} \end{array}$$

Táblica do karty 62.

Przykład wyciągania pierwiastków z liczb za pomocą wzorów Algebraicznych.

(B) - - - - 34,965,783 - - - $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$. (A) Pierwiastek.

$$x^3 = 27 \quad x = 3$$

$$7965 = 3x^2a + 3xa^2 + a^3$$

Dzielnik $3x^2 = 2700$ $a = 2$

$$3x^2a = 5400$$

$$3xa^2 = 36$$

$$a^3 = 8$$

Zbiór - - - - 5768

Reszta - - - - 2197783 $= 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ $x = 12$

Dzielnik $3x^2 = 3072$ $a = 7$

$$3x^2a = 21504$$

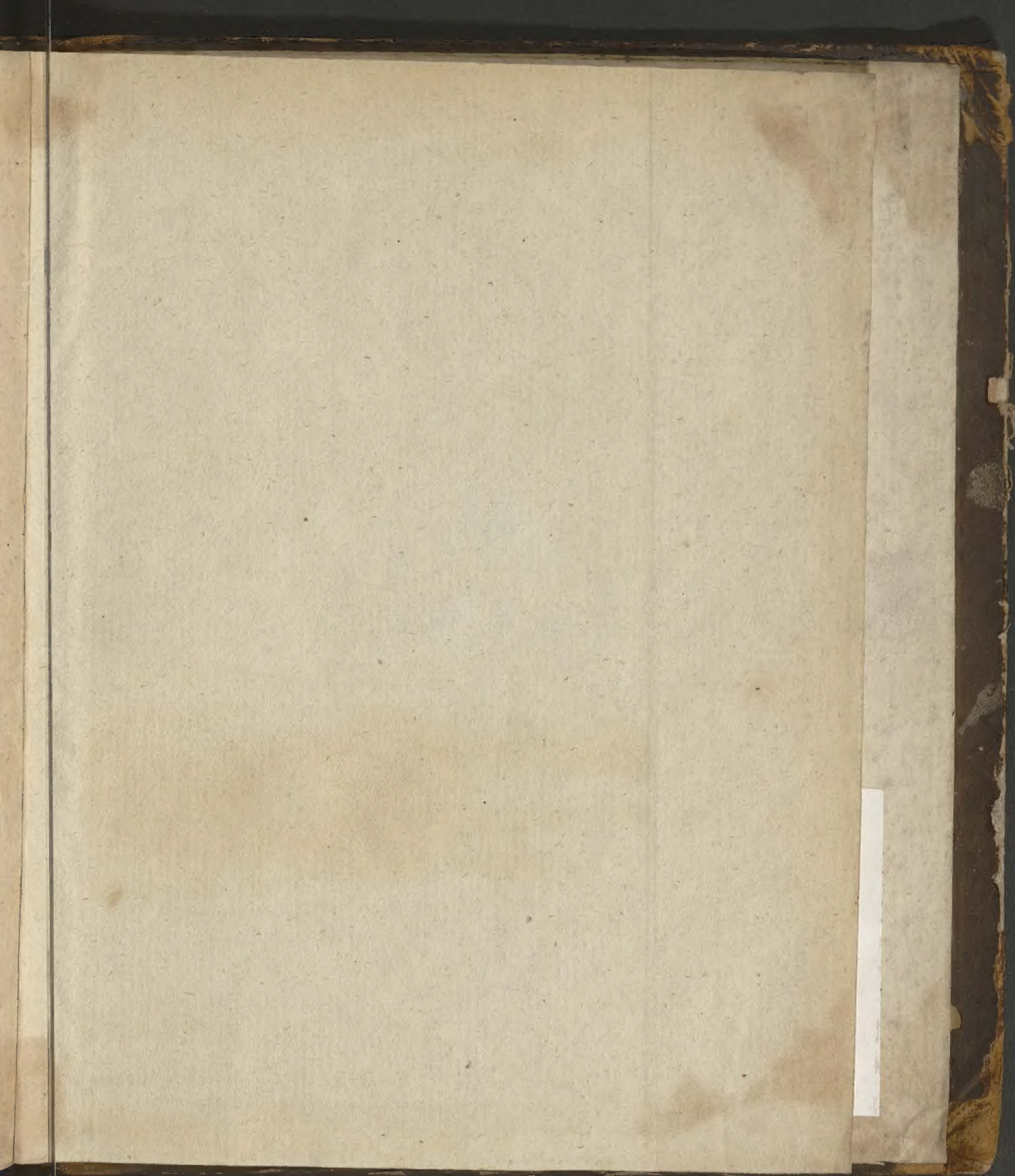
$$3xa^2 = 4704$$

$$a^3 = 343$$

Zbiór - - - - 2197783

Reszta - - - - 0 0 0 - - Pierwiastek cały - - - = 327





Biblioteka Jagiellońska



stdr0009662

